УДК 519.873

Двусторонние оценки вероятности безотказной работы системы при дисциплине Соловьева

О. Сахобов[*]

[*] *Национальный Университет Узбекистана, Механико-математический факультет, Ташкент, Узбекистан, 100174*

Аннотация. В этой работе развивается метод получения двусторонних оценок для характеристик надежности восстанавливаемых систем. Функционирование таких систем описывается, как известно, процессами массового обслуживания, где роль поступающих на обслуживание требований играют возникающие отказы частей системы. Процессы обслуживания, описывающие поведение восстанавливаемых систем, весьма сложны и их характеристики очень редко находится в замкнутой форме. Поэтому за последние 25–30 лет в основном И.Н.Коваленко, А.Д.Соловьевым, их учениками были разработаны асимптотические методы анализа восстанавливаемых систем, использующие тот реальный факт, что время ремонта элементов, отказывающих в системе, в среднем во много раз меньше интервалов времени между соседними отказами. Доказанные в этой теории предельные теоремы дают приближенные формулы для характеристик надежности, однако, эти предельные теоремы дают приближенные формулы для характеристик надежности, однако, эти предельные теоремы носят топологический характер, и известными общими методами трудно с приемлемой точностью оценить скорость сходимости в этих схемах, т.е. оценить погрешность в соответствующих приближенных формулах. Полученные двусторонние оценки позволяют находить оценки характеристик надежности восстанавливаемых систем при дисциплине Соловьева.

Ключевые слова: надежность, дисциплина Соловьева, двусторонние оценки.

1. Введение

Представим систему, состоящую из $n+1$ однотипных элементов - одного рабочего и n резервных. С течением времени некоторые элементы в системе отказывают и мгновенно поступают в ремонтное устройство, которое состоит из r ремонтных единиц. Каждая такая единица может одновременно ремонтировать один неисправный элемент. В начальный момент $t = 0$ все элементы исправны. Если одновременно не исправить более r элементов, то ремонтируются только r элементов, остальные остаются в очереди. Система отказывает, когда при неисправных n элементах отказывает последний работающий элемент. Если в системе неисправно k элементов, то суммарная интенсивность отказа элементов не зависит от прошлого поведения системы и равна λ_k. Времена ремонта отказывающих элементов независимы и имеют функцию распределения $G(x)$. После окончания ремонта каждый элемент мгновенно возвращается в систему. Процесс $\varkappa(t)$, описывающий поведение такой системы, есть число неисправных элементов в момент t. Множество состояний процесса $E = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, $E_+ = 0, 1, 2, \ldots, n-$ множество исправных состояний, $E_- = \{n+1\}-$ множество неисправных состояний. Описанную таким образом модель обозначают $(\lambda_k, G, \Gamma, n)$. В частности, она включает (λ, G, Γ, n) - общую модель резервирования.

Общая модель резервирования восстановлением представлена на рис. 1.

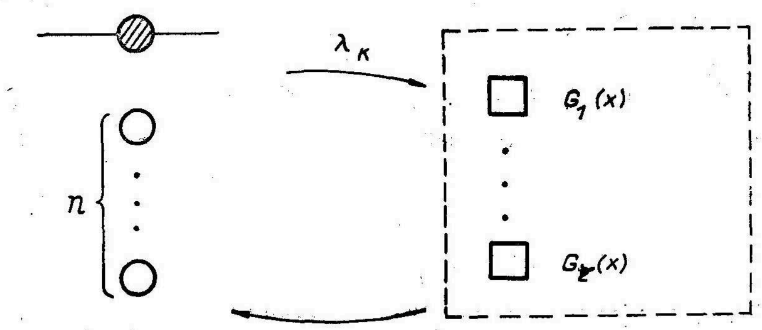

Рис. 1. Модель резервирования с восстановлением.

2. Постановка задачи. Вспомогательные результаты

Пусть дан регенерирующий процесс [1] $\varkappa(t)$ специального вида, в котором каждый период регенерации состоит из двух независимых частей

$$\xi^0 + \eta^0,$$

где первая часть имеет показательное распределение с параметром λ

$$P\{\xi^0 > t\} = e^{-\lambda t},$$

а вторая часть η^0- произвольное распределение со средним

$$M\eta^0 = T_0.$$

Предположим, что траектории процесса на этих частях независимы, на второй части периода в некоторой точке η^-, отсчитываемой от начала второй части $0 \le \eta^- \le \eta^0$, может произойти некоторое событие A (например, отказ системы) с вероятностью $q = P(A)$, причем это событие зависит от траектории процесса на данной второй части периода и не зависит от поведения процесса вне этой части. На первой части периода регенерации событие A не наступает.

Введем следующие обозначения:

η^+- длина второй части периода регенерации при условии, что на ней не произошло событие A;

$\chi-$ индикатор события A;

$$\eta = \eta^+(1-\chi) + \eta^-\chi; \quad M\eta^+ = T_+, \;\; M\eta^- = T_-,$$

$$M\eta = T = T_+p + T_-q = T_1 + T_2 \le T_0,$$

где $T_1 = pT_+, \; T_2 = qT_-, \;\; p = 1-q.$

Обозначим через τ момент первого наступления события A.

Тогда

$$\tau = (\xi_1 + \eta_1^+) + (\xi_2 + \eta_2^+) + \ldots + (\xi_{\nu-1} + \eta_{\nu-1}^+) + (\xi_\nu + \eta_\nu^-) = \xi + \zeta,$$

где

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu; \quad \zeta = \eta_1^+ + \eta_2^+ + \ldots + \eta_{\nu-1}^+ + \eta_\nu^-,$$

случайная же величина $\nu-$ номер первого периода регенерации, на котором наступило событие A. Для него имеем, очевидно, геометрическое распределение

$$P\{\nu = n\} = qp^{n-1}, \;\; n = 1, \, 2, \; \ldots.$$

Далее находим распределение ξ:

$$P\{\xi > t\} = e^{-\lambda q t}.$$

Так как случайные величины ξ и η при условии, что $\nu = n$, независимы, то плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ есть

$$\lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t},$$

Множество состояний E процесса $\varkappa(t)$ разбивается на два непересекающихся подмножества

$$E = E_+ \cup E_-$$

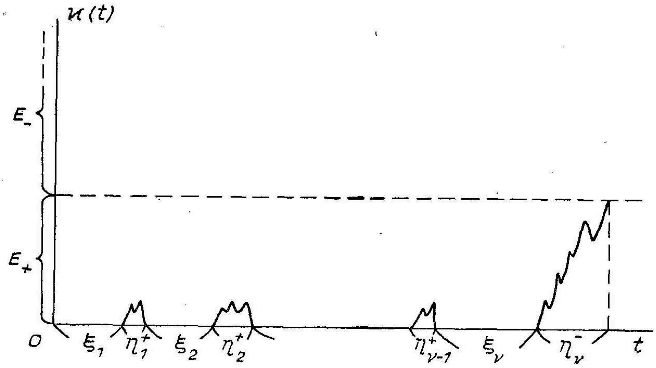

Рис. 2. Геометрическая интерпретация регенерирующего процесса специального типа

где E_+– множество исправных и E_-– множество неисправных состояний системы (рис. 2).

Пусть

$$\tau = \inf\{t : \varkappa(t) \in E_-\}$$

- момент первого отказа системы. Функция $R(t) = P\{\tau > t\}$, которую мы хотим оценить, есть вероятность безотказной работы системы до момента t (т.е. $R(t)$– функция надежности).

В реальных системах системах среднее время ремонта элемента обычно во много раз меньше среднего интервала между отказами элементов. Поскольку средний интервал

$$M\xi^0 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

то такое условие означает, что $\lambda T_0 = \lambda M \eta^0 << 1$.

Поэтому мы находим двусторонние оценки $\underline{R(t)} \le R(t) \le \overline{R(t)}$ для которых $\underline{R(t)} \backsim \overline{R(t)}$ при $\lambda T_0 \to 0$ равномерно по t.

В работе Соловьева А. Д. и Сахобова О. получены оценки:

Теорема 1. [1] Для процесса $\varkappa(t)$ при любом $t > 0$ справедливо неравенство

$$e^{-\lambda q t} \le R(t) \le e^{-\lambda q t} + \lambda T, \tag{1}$$

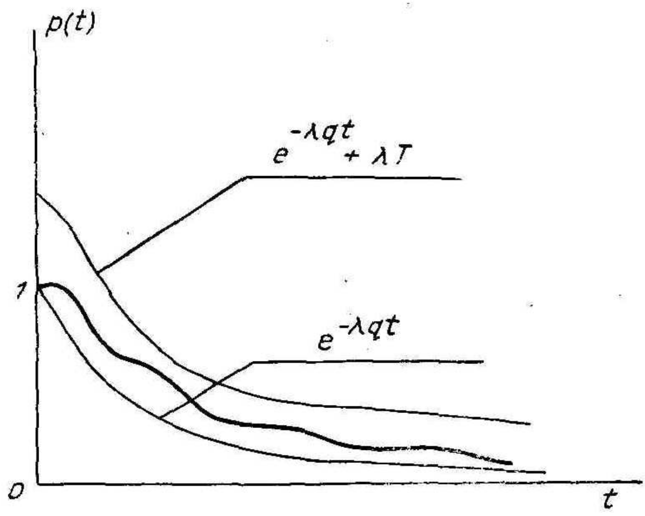

Рис. 3. Геометрическая иллюстрация оценки (1).

где $q-$ вероятность попадания процесса в множество E_- на одном периоде регенерации (рис. 3).

Поскольку $\eta(\omega) \leq \eta^0(\omega)$, почти всюду, то $T = M\eta \leq M\eta^0 = T_0$ и тогда имеем более грубую, но более простую оценку

$$e^{-\lambda q t} \leq R(t) \leq e^{-\lambda q t} + \lambda T_0. \tag{2}$$

Отсюда, из (2) имеем

$$\lim_{\lambda T_0 \to 0} R(t) = e^{-\lambda q t}.$$

В работе [17] мы получили и неравномерную оценку для $R(t)$.

Заметим, что в оценках (1) и (2) участвует $q-$ вероятность отказа, которая оценивается через стационарные вероятности, что для модели резервирования с восстановлением имеет вид

$$q_0 \leq q \leq \frac{\lambda_n p_n}{\lambda_0 p_0}, \tag{3}$$

где p_n- стационарные вероятности (в системе находится n требований).

Пусть $\xi_t(d)-$ число требовании в системе в момент t при заданной дисциплине обслуживания d.

Рассмотрим наиболее часто употребляемые дисциплины.

1. Дисциплина d_0 означает, что в каждый момент времени обслуживается только то требование, которое имеет наименьшую остаточную длину.
2. Дисциплина d_1, согласно которой требования поступают на обслуживание и обслуживаются в порядке пребывания.
3. Дисциплина d_2– обратный порядок обслуживания с прерыванием.
4. Дисциплина d_3– дисциплина разделения процессора.
5. Дисциплина d_4– в каждый момент обслуживается только требование с наибольшей остаточной длиной.

В работе [17] построены двусторонние оценки надежности $R(t) = P\{\tau > t\}$ для описанных выше дисциплин обслуживания в системе $(\lambda, G, 1, n)$.

3. Основные результаты

Наша задача состоит в том, чтобы найти двусторонние оценки вероятности $R(t) = P\{\tau > t\}$ при d_4 - дисциплине Соловьева.

В работе [17] было доказано, что

$$\xi_t(d_0) \leq \xi_t(d) \leq \xi_t(d_4),$$

откуда следует

$$q(d_0) \leq q(d) \leq q(d_4).$$

Поэтому, в системе $(\lambda_k, G, 1, n)$ справедливо неравенство

$$\frac{\lambda_1 \, \ldots \, \lambda_n}{n!} m_1^n \left(1 - \frac{n\lambda m_2}{2m_1}\right) \leq q(d) \leq \frac{\lambda_1 \, \lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n}{(n+1)!} M \left(\eta_1 + \ldots + \eta_{n+1}\right)^n,$$

где $m_i = \int\limits_0^\infty x^i \, dG(x)$, $(i = 1,\, 2)$

Теорема 2. В системе (λ_k, G, l, n) с достаточно малой нагрузкой при d_4 - дисциплине Соловьева справедливо неравенство

$$\underline{q} < q(d_4) < \overline{q},$$

где

$$\underline{q} = \frac{\lambda_1 \, \lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n}{(n+1)!} M(\eta_1 + \ldots + \eta_{n+1})^n - \frac{\lambda_1 \, \lambda_2 \, \ldots \, \lambda_{n+1}}{(n+1)!} M(\eta_1 + \ldots + \eta_{n+1})^{n+1},$$

$$\overline{q} = \frac{\lambda_1 \, \lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n}{(n+1)!} M(\eta_1 + \ldots + \eta_{n+1})^n.$$

Итак,

$$e^{-\lambda_0 \overline{q} t} \leq R(t) \leq e^{-\lambda_0 \underline{q} t} + \frac{\lambda_0 T_0}{1 - \overline{\lambda} T_0},$$

где $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$.

Следствие. Для системы (λ_k, G, l, n) при d_4 - дисциплине Соловьева

$$B_n \frac{\rho^n}{n!} \leq q \leq A_n \frac{\rho^n}{n!},$$

где

$$B_n = 1 - \frac{\lambda_n m_2}{m_1}; \;\; A_n = \sum_{s=1}^{\infty} s^{n-1} (\gamma^{\gamma} *)^{s-1};$$

$$\rho = \lambda m_1, \;\; m_1 = \int\limits_0^{\infty} x^i dG(x) \;\; (i = 1,\, 2); \;\; \gamma^* = e^{\rho} - 1$$

$$\exp\left\{ \frac{-\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n}{(n+1)!} M(\eta_1 + \ldots + \eta_{n+1})^n \right\} \leq R(t) \leq$$

$$\leq \exp\left\{ - \frac{-\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n}{(n+1)!} m_1^n \left(1 - \frac{n \lambda m_2}{m_1} \right) \right\} + \frac{\lambda_0 T_0}{1 - \overline{\lambda} T_0}.$$

В основном А.Д.Соловьевым и его учениками [2]-[17] были разработаны асимптотические методы восстанавливаемых систем для случая, когда время ремонта элементов, отказывающих в системе, в среднем во много раз меньше интервалов времени между соседними отказами.

Литература

1. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М.: Сов. радио, 1967.
2. *Генеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
3. *Гнеденко Д. В., Соловьев А. Д.* Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1975. — No. 3. — С. 121–128.
4. *Гнеденко Д. В., Соловьев А. Д.* Одна общая модель резервирования с восстановлением // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика — 1974. — No. 6. — С. 113–118.
5. *Соловьев А. Д.* Основы математической теории надежности, вып.1,2,3. — М.: Знание, 1975.
6. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое поведение первого наступления редкого события в регенерирующем процессе. — Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1971. — No. 6. — С. 79–89.

7. *Овчинников В. Н., Соловьев А. Д.* Асимптотический анализ после отказовых характеристик надежности. Теория массового обслуживания // Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания. Т.1. — М.: МГУ, 1976.
8. *Соловьев А. Д.* Резервирование с быстрым восстановлением // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1970. — No. 1. — С. 56–71.
9. *Козлов В. В., Соловьев А. Д.* Оптимальное обслуживание восстанавливаемых систем, часть I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1978. — No. 3.
10. *Козлов В. В., Соловьев А. Д.* Оптимальное обслуживание восстанавливаемых систем, часть II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1978. — No. 4.
11. *Соловьев А. Д., Сахобов О.* Двухсторонние оценки надежности восстанавливаемых систем // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ-мат. наук. — 1976. — No. 5. — С. 28–33.
12. *Соловьев А. Д., Сахобов О.* Двухсторонние оценки для вероятности отказа системы на одном периоде регенерации // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ-мат. наук. — 1977. — No. 2. — С. 41–46.
13. *Сахобов О., Соловьев А. Д.* Двусторонние оценки надежности в общей модели резервирования с одной ремонтной единицей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1977. — No. 4.
14. *Сахобов О.* Духсторонняя оценка надежности сложной восстанавливаемой системы // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1979. — No. 1. — С. 30–35.
15. *Сахобов О.* О некоторых двусторонних неравенствах для характеристик надежности // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980. — No. 6. — С. 31–33.
16. *Сахобов О., Соловьев А. Д.* Двусторонние оценки характеристик надежности восстанавливаемых систем. — Ташкент: Фан, 1983.
17. *Сахобов О.* Асимптотически точные неравенства для характеристик надежности восстанавливаемых систем. — Ташкент: Фан, 1988.

UDC 519.873

Two-sided bounds of the probability of failure-free operation of the system under the discipline of Soloviev

O. Sakhobov*

* *National University of Uzbekistan, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, 100174*

In this work, a method is developed for obtaining two-sided bounds for the reliability characteristics of the restorable systems. It is well-known, that the behaviour of such a systems is described by queueing processes, where the flow of the customers is a the flow of emerging failures of the parts of the system. Queueing processes describing the behaviour of the restorable systems are very complex and their characteristics are very rarely in the explicit form. Therefore, in recent 25-30 years, mainly I. Kovalenko, A.D. Soloviev and their students have developed the asymptotic methods of the analysis of the recoverable systems, taking into consideration the fact that the average value of the repair time of elements that fail in the system is many times less than the average length of the time intervals between neighboring failures. The limit theorems proved in this theory give approximate formulas for the reliability characteristics. However, these limit theorems have a topological nature, and it is difficult to estimate the rate of convergence for these systems with reasonable accuracy. I.e., to estimate the error in the corresponding approximate formulas. The obtained in the paper two-sided bounds give the possibility to find the bounds of the reliability characteristics of the restorable systems with the Soloviev discipline of the repair.

Keywords: reliability, discipline of Soloviev, two-sided bounds.