УДК 519.218.31

Необходимые условия существования стационарного распределения в системе адаптивного управления конфликтными потоками

М. А. Федоткин*, **Е. В. Кудрявцев***

* *Кафедра программной инженерии,*
Центр прикладной теории вероятностей,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина, д. 23, Нижний Новгород, Россия, 603950

Аннотация. В работе рассматривается система нециклического управления конфликтными потоками неоднородных требований. Построена и изучена математическая модель управляющей системы обслуживания с переменной структурой. Найдены рекуррентные соотношения для состояний обслуживающего устройства и длин очередей по потокам. Также получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений векторной марковской последовательности состояний системы через один шаг и через число шагов, равное количеству основных состояний обслуживающего устройства. Предлагается итеративно-мажорантный метод, который позволяет найти легкопроверяемые необходимые условия существования стационарного распределения.

Ключевые слова: конфликтные потоки, нециклическое управление, стационарное распределение, производящие функции.

1. Введение

Данная работа связана с важной проблемой эффективного управления транспортным перекрестком. Предлагается адаптивный нециклический алгоритм, учитывающий не только длины очередей, но и очередность прихода заявок.

В работе рассматривается транспортный перекресток как система массового обслуживания. Обслуживаются 2 конфликтных неординарных пуассоновских потока Π_1, Π_2. В каждый вызывающий момент по потоку j приходит k заявок с вероятностями $P_j(k)$, $k \geq 1$, $j = 1, 2$, определенными в [1, 2].

Обслуживание производится с помощью адаптивного нециклического алгоритма, подробное описание которого приведено в работе [3].

2. Постановка задачи

В системе обслуживающим устройством является светофор, а требованиями — автомобили, подъезжающие к светофору. Множество состояний светофора $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}, \Gamma^{(5)}, \Gamma^{(6)}, \Gamma^{(7)}, \Gamma^{(8)}\}$. Описание каждого состояния приведено в [3].

Будем рассматривать систему в моменты τ_i, $i \geq 0$, или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Здесь τ_0 — начальный момент времени, а величины τ_i, $i \geq 0$ — моменты смены состояний обслуживающего устройства. Пусть $y_0 = (0,0)$, $y_1 = (1,0)$, $y_2 = (0,1)$ и X — целочисленная одномерная неотрицательная решетка. Для нелокального описания системы при $i = 0, 1, \ldots$ введем следующие случайные величины и элементы:

1) $\Gamma_i \in \Gamma$ — состояние обслуживающего устройства на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$;

2) $\eta_{j,i} \in X$ — число заявок j-го потока, поступивших в систему за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i})$;

3) $\eta'_{j,i}$ — случайный вектор, принимающий значение y_0, если на i-ом такте $[\tau_i, \tau_{i+1})$ в систему не поступило ни одной заявки, или y_j, если на i-ом такте первыми поступили заявки j-го потока;

4) $\kappa_{j,i} \in X$ — число заявок j-го потока, которые находятся в системе в момент τ_i, $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i})$;

5) $\xi_{j,i}$ — максимально возможное число заявок j-го потока, которые система может обслужить на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\xi_i = (\xi_{1,j}, \xi_{2,j})$.

Примем следующие соотношения для длительностей T_i, $i = \overline{1,6}$,

$$T_{3j-2} = \mu_{j,1}^{-1} + l_{3j-2}\alpha_j \mu_{j,1}^{-1}, \quad T_{3j-1} = l_{3j-1}\alpha_j \mu_{j,2}^{-1}, \quad T_{3j} = l_{3j}\alpha_j \mu_{j,2}^{-1},$$

где $l_{3j-2} \in X$, l_{3j-1}, $l_{3j} \in N$, параметры $\mu_{j,1}^{-1}$ и $\mu_{j,2}^{-1}$ — длительности обслуживания одной заявки на первом и втором этапе соответственно. Величина $0 < \alpha_j \leq 1$ обозначает часть обслуживания, которую необходимо пройти требованию, чтобы можно было начать обслуживать следующую заявку. В случае $\alpha_j < 1$ одновременно может обслуживаться несколько требований.

Адаптивный алгоритм смены состояний обслуживающего устройства из множества Γ задается с помощью рекуррентного соотношения:

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma^{(3j-2)}, & \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}\right] \& [(\kappa_{j,i} > 0) \vee (\kappa_{s,i} \geq K_s) \vee (\eta'_i = y_j)]\right\} \vee \\ & \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}\right] \& [\kappa_{s,i} = 0] \& [\kappa_{j,i} \leq K_s] \& [\eta'_i = y_j]\right\}, \\ \Gamma^{(3j-1)}, & \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}\right] \& [\eta'_i = y_j]\right\}, \\ \Gamma^{(3j)}, & \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}\right] \& [\eta'_i \neq y_j]\right\}, \\ \Gamma^{(6+j)}, & \left[\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}\right] \& [\kappa_{j,i} = 0] \& [\kappa_{s,i} < K_s] \& [\eta'_i = y_0]. \end{cases}$$

Как видно из приведенного соотношения состояние обслуживающего устройства на следующем шаге зависит от состояния на предыдущем шаге, длины очередей и очередности прихода заявок. При этом динамика длины очереди задается следующими рекуррентными соотношениями

$$\kappa_{j,i+1} = \begin{cases} \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \Gamma \backslash \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}; \\ \eta_{j,i} + \max\{0, \kappa_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \end{cases}$$

3. Свойства марковской последовательности

Состояние системы на i-м такте времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ описывается случайным элементом $(\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega))$, $i = 0, 1, \ldots$ Для векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ доказана марковость и проведена классификация ее состояний.

Теорема 1. *Случайная векторная последовательность состояний системы вида $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ с заданным начальным распределением вектора (Γ_0, κ_0) является марковской.*

Теорема 2. *Пусть $j, s = 1, 2$, $j \neq s$, $x = (x_1, x_2) \in X^2$ и*

$$G = \{(\Gamma^{(h)}, x) \colon \Gamma^{(h)} \in \Gamma, x \in X^2\},$$

$$G^{(3j-2)} = \{(\Gamma^{(3j-2)}, x_s y_s) \colon x_s < K_s - l_{3s}\},$$

$$G^{(3j-1)} = \{(\Gamma^{(3j-1)}, x_s y_s) \colon x_s < K_s - l_{3s}\},$$

$$G^{(6+j)} = \{(\Gamma^{(6+j)}, x) \colon x_j > 0\} \cup \{(\Gamma^{(6+j)}, x) \colon x_s \geq K_s - l_{3s}\},$$

$$G_j = \begin{cases} G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)}, & l_{3j-2} > 0; \\ G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)} \cup G^{(3j-1)}, & l_{3j-2} = 0. \end{cases}$$

Тогда состояния из G_j являются несущественными и множество вида $G_0 = G \backslash (G_1 \cup G_2)$ является неразложимым апериодическим классом существенных состояний.

Для любого $i \geq 0$, $r = \overline{1,8}$, $x \in X^2$ введем обозначение:

$$Q_i^{(r)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x).$$

В работе [3] были найдены рекуррентные соотношения для одномерных распределений $\{Q_i^{(r)}(x) \colon r = \overline{1,8}, x \in X^2\}$, $i \geq 0$, марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$.

Пусть $z = (z_1, z_2)$, где z_1, z_2 действительные или комплексные переменные и $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$. Положим $z^x = z_1^{x_1} z_2^{x_2}$, где $x = (x_1, x_2) \in X^2$. Рассмотрим теперь производящие функции

$$W_i^{(r)}(z) = \sum_{x \in X^2} Q_i^{(r)}(x) z^x, r = \overline{1,8}; \quad W_i(z) = \sum_{r=1}^{8} W_i^{(r)}(z).$$

Используя рекуррентные соотношения для одномерных распределений $\{Q_i^{(r)}(x)\colon r=\overline{1,8}, x\in X^2\}$, $i\geq 0$, векторной последовательности $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i=0,1,\ldots\}$, стандартным образом были получены рекуррентные соотношения для производящих функций $W_i^{(r)}(z)$, $r=\overline{1,8}$, $i>0$.

4. Необходимые условия существования стационарного распределения

Предложенный в работе итеративно-мажорантный метод позволил получить следующие утверждения. Условия этих утверждений легко проверяются.

Теорема 3. *Если существует предельное распределение марковской последовательности* $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$, *то*

$$\frac{\alpha_1\lambda_1 M_1}{\mu_{1,2}}+\frac{\alpha_2\lambda_2 M_2}{\mu_{2,2}}<1,$$

где λ_1 *и* λ_2 *— интенсивности потоков вызывающих моментов,* M_1 *и* M_2 *— математические ожидания числа требований в вызывающих моментах для потоков* Π_1 *и* Π_2.

Из условия теоремы 3 легко вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Предельное распределение* $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$ *существует только тогда, когда выполняется* $\alpha_j\lambda_j M_j<\mu_{j,2}$, $j=1,2$.

Введем следующие обозначения $T=T_1+T_3+T_4+T_6+n_1T_2+n_2T_5$, $L_j=l_{3j-2}+n_jl_{3j-1}+l_{3j}$, $j=1,2$, где n_1 и n_2 — максимальное число продлений состояний $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(5)}$.

Теорема 4. *Для существования предельного распределения последовательности* $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$ *необходимо выполнение неравенства*

$$\lambda_1M_1T-L_1+\frac{\lambda_1M_1T_5}{l_5-\lambda_2M_2T_5}(\lambda_2M_2T-L_2)<0.$$

Теорема 5. *Для существования предельного распределения последовательности* $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$ *необходимо выполнение неравенства*

$$\lambda_1M_1T-L_1+\frac{l_2-\lambda_1M_1T_2}{\lambda_2M_2T_2}(\lambda_2M_2T-L_2)<0.$$

Следствие 2. *Для существования предельного распределения последовательности* $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$ *необходимо, чтобы хотя бы для одного* $j=1,2$ *выполнялось неравенство* $\lambda_jM_jT-L_j<0$.

5. Заключение

В изучаемой системе были найдены легко проверяемые необходимые условия существования предельного распределения векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$.

Литература

1. *Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V.* Construction and Analysis of a Mathematical Model of Spatial and Temporal Characteristics of Traffic Flows // Automatic Control and Computer Sciences — 2014. — Vol. 48, no. 6. — P. 358–367.
2. *Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V.* Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations // Automatic Control and Computer Sciences. — 2015. — Vol. 49, no. 1. — P. 29–36.
3. *Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В.* Построение математической модели адаптивного управления неординарными потоками // Материалы Международной научной конференции "Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения", Минск, БГУ, 2015. — С. 106–111.

UDC 519.218.31

Necessary conditions for stationary distribution existence in the adaptive control system of conflict flows

M. A. Fedotkin*, E. V. Kudryavtsev*

* *Department of Probability Theory,*
Nizniy Novgorod State University,
Gagarin Avenue 23, Nizniy Novgorod, 603950, Russia

There is considered the process of control conflict flows of nonhomogeneous arrivals. A mathematical model of a control system with variable structure is constructed and studied. Recurrence relations are found for the states of the serving device and the lengths of the flows queues. Recurrence relations are also obtained for one-dimensional distributions of the vector Markov sequence of states of the system in one step and through the number of steps equal to the number of basic states of the serving device. We propose an iterative-majorant method that allows us to find easily verifiable necessary conditions for stationary distribution existence.

Keywords: conflict flows, non-cyclic control, stationary distribution, generating functions.