УДК 519.214.8

Точная асимптотика вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде

А. В. Шкляев*

* *Лаборатория математической статистики при кафедре математической статистики и случайных процессов, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. В работе рассматривается надкритический ветвящийся процесс в случайной среде, представляющей собой независимые одинаково распределенные случайные величины. Предполагается, что для сопровождающего блуждания выполнено правостороннее условие Крамера, а на количество потомков одной частицы накладываются ограничения на уровне моментов. Для логарифма процесса доказана интегро-локальная теорема, то есть получена точная асимптотика вероятностей попадания в отрезки малой длины. Полученный результат описывает как большие, так и умеренные уклонения процесса. Методика исследования процесса основана на представлении процесса как решения рекуррентного уравнения.

Ключевые слова: Большие уклонения, интегро-локальные теоремы, ветвящиеся процессы, случайные среды, рекуррентные последовательности.

1. Введение

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ...)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин, которые мы будем называть случайной средой, а f_y —семейство производящих функций. Ветвящимся процессом Z_n называют марковскую цепь с $Z_0 = 1$ и условной переходной производящей функцией

$$f_{Z_{n+1}|Z_n,\boldsymbol{\eta}}(s) = f_{\eta_n}(s)^{Z_n}.$$

При изучении ветвящихся процессов важную роль играет так называемое сопровождающее блуждание

$$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n,$$

где $\xi_i = f'_{\eta_i}(1)$. Мы будем предполагать, что математическое ожидание $\mathbf{E}\xi_1 = \mu$ конечно и процесс надкритический, $\mu > 0$. Кроме того, будем считать, что шаги сопровождающего блуждания удовлетворяют правостороннему условию Крамера $\mathbf{E}e^{h\xi_1} < \infty$ при $h \in [0, h^+)$ при некотором h^+.

Ветвящиеся процессы в случайной среде были введены в работах [1], [2], [3]. Первоначально основные результаты были связаны со случаем дробно-линейных производящих функций f_y, в котором удается получить явное выражение для вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = k|\boldsymbol{\eta})$, в настоящее время хорошо изучен общий случай (например, [4], [5]).

В данной работе рассматривается асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x+\Delta_n)),\ n \to \infty$$

при $\Delta_n \to 0$, $x \in [\mu n, \theta n]$, где $\theta \in [\mu, m^+)$, m^+ — некоторая константа, определенная ниже. При $x - \mu n = O(\sqrt{n})$ это вероятности попадания в "типичные множества", при $x - \mu n$ порядка n это вероятности так называемых больших уклонений, в остальных случаях это вероятности умеренных уклонений.

Асимптотика вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде рассматривалась рядом авторов, в частности, точная асимптотика исследовалась М.В.Козловым в работах [6], [7] в случае геометрического распределения числа потомков. В этом случае было показано, что при выполнении условия Крамера

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n) \sim \tilde{I}(\theta)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n),\ n \to \infty,$$

где $\theta \in [\mu, \theta^+)$, $\tilde{I}(\theta)$ — некоторая функция, для которой найдено явное выражение. Использованные в работе методы напрямую опирались на явное представление изучаемых вероятностей, вытекающее из того, что распределение числа потомков геометрическое. Другой подход был использован C.Boeinghoff, G.Kersting, V.Bansaye, J.Beresticky в работах [8], [9]. Они рассматривали случаи как легких (геометрических), так и тяжелых (степенных с достаточно малым показателем) хвостов распределения величин X_i, представляющих число непосредственных потомков одной частицы. В этих работах получена грубая (логарифмическая) асимптотика. В вышедшей в этом году работе [10] исследована асимптотика умеренных уклонений для надкритических ветвящихся процессов, но рассмотрена только зона, в которой работает нормальное приближение для рассматриваемых вероятностей.

В данной работе получена точная асимптотика

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n I(\theta)}{\sqrt{n}}\mathbf{P}(S_n \geq \theta n),\ n \to \infty,$$

для надкритических ветвящихся процессов, чье сопровождающее блуждание удовлетворяет условию Крамера, а число $X \stackrel{d}{=} Z_1$ непосредственных потомков одной частицы удовлетворяет условию $\mathbf{E}X^h < \infty$, где $h \in [0, \max(h^+, 1+\varepsilon))$ при некотором $\varepsilon > 0$. Для $I(\theta)$ получено явное выражение и доказано, что эквивалентность при этом равномерна по $x \in [\mu n, \theta n]$ при любом $\theta \leq m^+$.

2. Основная часть

Пусть Z_n — ветвящийся процесс в случайной среде, X — число непосредственных потомков одной частицы, ξ — шаг сопровождающего блуждания. Будем предполагать выполнение следующих условий:
(A) ξ нерешетчата, $\mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$, $h \in [0, h^+)$,
(B) $\mathbf{E}X^h < \infty$ при $h \in [0, \max(h^+, 1+\varepsilon))$ при некотором $\varepsilon > 0$,
(C) $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$.

Положим $m(h) = (\ln R(h))'$, $\sigma^2(h) = m'(h)$, $m^+ = \lim_{h\to h^+} m(h)$. Функция $m(h)$ строго возрастает, поэтому при любом $\theta \in [\mu, m^+)$ найдется единственное $h \in [0, h^+)$, для которого $m(h) = \theta$, обозначать которое будем h_θ. Положим

$$\Lambda(\theta) = \sup_h(\theta h - \ln R(h)) = h_\theta\theta - \ln R(h_\theta),\ \theta \in [\mu, m^+).$$

Сопряженной к ξ величиной будем называть $\xi^{(h)}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi^{(h)} \in A) = \frac{1}{R(h)} \int_A e^{hx}\mathbf{P}(\xi \in dx).$$

Тогда $m(h) = \mathbf{E}\xi^{(h)}$, $\sigma^2(h) = \mathbf{D}\xi^{(h)}$.

Теорема. Пусть выполнены условия (A), (B), (C). Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim \hat{I}(x/n)\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) \sim I(x/n)\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}e^{-\Lambda(x/n)}$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, достаточно медленно стремящихся к нулю, выполнено равномерно по $x \in [\mu n, \theta n]$ при любом $\theta \in [\mu, m^+)$. Здесь

$$\hat{I}(y) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}Z_m^{h_y} R(h_y)^{-m},\ I(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(h_y)}\hat{I}(y).$$

Равномерность полученных результатов по x позволяет получать интегральные результаты вида $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq x)$, однако, интегро-локальная форма более универсальна и позволяет одним выражением описывать как большие (порядка n) так и умеренные (любого меньшего порядка) отклонения от среднего μn.

Метод получения указанного результата основан на исследовании рекуррентной последовательности Y_n, где

$$Y_n = A_nY_{n-1} + B_n.$$

Здесь A_i, $i \leq n$ — н.о.р. случайные величины, такие что $R(h) = \mathbf{E}A_i^h < \infty$, $h \in [0, h^+)$, B_i, $i \leq n$ — величины, такие что B_i не зависит от

$A_{i+1}, ..., A_n$ при любом $i < n$. Рекуррентные последовательности такого вида хорошо изучены, в частности в крамеровском случае большие уклонения для них описаны в [11], однако, принято рассматривать именно случай н.о.р. (A_i, B_i). В рассматриваемом же нами случае B_i, во-первых, зависят от предыдущих A_i, а вот вторых могут быть не одинаково распределенными при определенных ограничениях на моменты $\mathbf{E}B_i^h$. При $\mathbf{E}\ln A_1 > 0$ для таких последовательностей даже в случае растущих B_i удается получить теорему об асимптотике вероятностей $\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x+\Delta_n))$.

Ветвящийся процесс представляет последовательность такого вида, если рассматривать $A_i = e^{\xi_i}$, $B_i = Z_i - Z_{i-1}e^{\xi_i}$. Удается показать, что в нашем случае последовательности A_i, B_i удовлетворяют требуемым условиям, оценив моменты $\mathbf{E}B_i^h$ при различных h.

3. Заключение

В работе получена асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(Z_n \in [x, x+\Delta_n))$$

равномерно по $x \in [\mu n, \theta n]$, где $\theta \in [\mu, m^+)$. В отличие от работ [5], [8] полученная асимптотика точная, а не логарифмическая, по сравнению с [10] изучен более широкий диапазон x, а в сравнении с [6] результат не использует явного представления вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = k|\boldsymbol{\eta})$. Техника интегро-локальных теорем, представленная Shepp ([12]), Stone ([13]) и активно разработанная впоследствии А.А. Боровковым, Могульским и рядом других математиков, позволяет получить универсальный результат, сочетающий в себе теорему об умеренных и больших уклонениях. Подход, основанный на рассмотрении представления процесса в виде рекуррентно заданной последовательности, позволяет изучать асимптотику не только непосредственно для ветвящегося процесса, но и для других представимых в таком виде моделей, в частности, ветвящихся процессов в случайной среде с иммиграцией.

Литература

1. *Smith, W., and Wilkinson, W.* On branching processes in random environments // The Annals of Mathematical Statistics. — 1969. — Vol. 40, no. 3. — P. 814–827.
2. *Athreya, K., Karlin S.* On branching processes with random environments: I: Extinction probabilities // The Annals of Mathematical Statistics. — 1971. — Vol. 42, no. 5. — P. 1499–1520.
3. *Athreya, K., Karlin S.* Branching processes with random environments, II: Limit theorems // The Annals of Mathematical Statistics. — 1971. — Vol. 42, no. 6. — P. 1843–1858.

4. *Afanasyev, V. I., Geiger, J., Kersting, G., Vatutin, V. A.* Criticality for branching processes in random environment // Annals of probability. — 2005. — Vol. 33, no. 2. — P. 645–673.
5. *Afanasyev, V. I., Boinghoff, C., Kersting, G., Vatutin, V. A.* Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment // Journal of Theoretical Probability. — 2012. — Vol. 25, no. 3. — P. 703–732.
6. *Kozlov, M. V.* On large deviations of branching processes in a random environment: geometric distribution of descendants // Discrete Mathematics and Applications. — 2006. — Vol. 16, no. 2. — P. 155–174.
7. *Kozlov, M. V.* On large deviations of strictly subcritical branching processes in a random environment with geometric distribution of progeny // Theory of Probability and Its Applications. — 2010. — Vol. 54, no. 3 — P. 424-446.
8. *Boinghoff, C., Kersting G..* Upper large deviations of branching processes in a random environment—Offspring distributions with geometrically bounded tails // Stochastic Processes and their Applications. — 2010. — Vol. 120, no. 10. — P. 2064–2077.
9. *Bansaye V., Berestycki J.* Large deviations for branching processes in random environment // ArXiv:0810.4991 — 2008.
10. *Grama, I, Liu Q., Miqueu E.* Berry–Esseen's bound and Cramer's large deviation expansion for a supercritical branching process in a random environment // Stochastic Processes and their Applications. — 2017. — Vol. 127, no. 4. —- P. 1255-1281.
11. *Shklyaev, A. V.* Large Deviations for Solution of Random Recurrence Equation // Markov Processes and Related Fields — 2016. — Vol. 22, no.1. — P. 139-164.
12. *Shepp L. A.* A local limit theorem // Annals of Math. Statistics. — 1964. — Vol. 35, no. 1. — P. 419–423.
13. *Stone C.J.* Local limit theorems for asymptotically stable distributions // Notices Amer. Math. Soc. — 1964 — Vol. 11. — P. 465.

UDC 519.214.8

Large Deviation Probabilities for the Branching Process in Random Environment'

A. V. Shklyaev*

* *Department of Mathematical Statistics and Stohastic Processes,*
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

We consider a branching process in random environment of i.i.d. random variables. Suppose that the associated random walk for the process satisfies Cramer's condition and the number of direct descendants of one particle have enough bounded moments. Under these conditions we prove an integro-local theorem for logarithm of the process. This result concernes large and moderate deviation probabilities. Our method is based on representation of branching process as a solution of the random equation.

Keywords: large deviations, integro-local theorem, branching processes, random environment, random equations.