УДК 519.2

Предельные теоремы для систем массового обслуживания с различными дисциплинами обслуживания

С. А. Гришунина[*†]

[*] *Кафедра теории вероятностей, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

[†] *Департамент прикладной математики, Московский Институт Электроники и Математики Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Таллинская улица, д.34, Москва, Россия, 123458*

Аннотация. В данной работе изучаются системы массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком и независимыми временами обслуживания требований с конечным математическим ожиданием. Рассматриваются системы с различными дисциплинами обслуживания: системы с общей очередью и системы с отдельными очередями перед каждым прибором. В последнем случае клиент, пришедший в систему, выбирает один из приборов в соответствии с заданным правилом и остается в выбранной очереди до момента выхода из системы. Определяются некоторые классы дисциплин и изучается асимптотическое поведение многоканальной системы обслуживания в случае высокой загрузки (коэффициент загрузки $\rho \geq 1$). Основным результатом данной работы являются предельные теоремы о слабой сходимости нормированных процессов остаточного времени ожидания и длины очереди к Винеровскому процессу в случае $\rho > 1$ и его абсолютному значению при $\rho = 1$.

Ключевые слова: система массового обслуживания, высокая загрузка, предельные теоремы, дисциплина обслуживания.

1. Описание модели

Рассматривается система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком $A(t)$ интенсивности λ. Пусть θ_j - jая точка регенерации, $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ - j-ый период регенерации, $\xi_j = A(\theta_j) - A(\theta_{j-1})$ и $\mu = \mathbf{E}\tau_1 < \infty$, $a = \mathbf{E}\xi_1 < \infty$.

Времена обслуживания $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$ и конечным математическим ожиданием $b = \int_0^{\infty} x dB(x)$. Кроме того, последовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ не зависит от $A(t)$. Рассматриваются системы с различными дисциплинами обслуживания. Во-первых, системы с общей очередью. Во-вторых, системы с отдельной очередью перед каждым прибором, где пришедшее требование выбирает прибор в соответствии с некоторым правилом и остается в выбранной очереди до момента выхода из системы. Таким образом система разделяется на r

одноканальных систем. Для дисциплин с прерываниями предполагается, что обслуживание требования после прерывания продолжается с того момента, на котором оно было прервано.

Примерами являются следующие дисциплины:

(i) Системы с общей очередью. Рассматривается класс консервативных дисциплин, таких что число занятых приборов в момент t равно $\min(r, Q(t))$, где $Q(t)$ - общее число требований в системе в момент t.
Обозначим D_0 дисциплину FIFO (first in - first out) и введем две дисциплины с прерываниями: D_1 и D_2. Для D_1 (D_2) в любой момент t остаточное время обслуживания требования на приборе не более (менее), чем остаточное время обслуживания любого требования, находящегося в очереди (если такие есть).

(ii) Пришедшее требование обслуживается j-ым прибором с вероятностью $\frac{1}{r}$ независимо от остальных (дисциплина D_3).

(iii) Требование с номером n обслуживается j-ым прибором, если $n = rm + j$, где $m = 0, 1, 2, \ldots, j = \overline{1, r}$ (циклическая дисциплина D_4).

(iv) Перед каждым прибором есть своя очередь и пришедшее требование выбирает прибор с минимальной очередью (дисциплина D_5). Если таких приборов несколько, то требование с одинаковыми вероятностями случайным образом выбирает один из них.

Для прибора с номером i введем процесс $q_i(t)$, представляющий собой число требований, которые должны быть обслужены в момент t в соответствии с выбранной дисциплиной и $\eta_{ji}(t)$ - остаточное время обслуживания j-го требования ($j = \overline{1, q_i(t)}, i = \overline{1, r}$). Положим $\eta_{ji}(t) = 0$, если $q_i(t) = 0$.

Обозначим

$$\overrightarrow{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_r(t)),$$

$$\overrightarrow{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_r(t)), \text{ где } W_i(t) = \sum_{j=1}^{q_i(t)} \eta_{ji}(t);$$

$$\overrightarrow{Q}_n = \overrightarrow{q}(\theta_n - 0) = (q_{n1}, \ldots, q_{nr}), \overrightarrow{W}_n = \overrightarrow{W}(\theta_n - 0) = (W_{n1}, \ldots, W_{nr}),$$

$$W(t) = \sum_{j=1}^{r} W_j(t), W_n = W(\theta_n - 0), \qquad Q(t) = \sum_{j=1}^{r} q_j(t), Q_n = Q(\theta_n - 0).$$

Предположение 1 *Для любого* $i = \overline{1, r}$

$$P\{\xi_1 = 0, \tau_1 > 0\} + P\{\xi_1 = 1,\ t_1 + \eta_{i1} < \tau_1\} > 0.$$

Здесь t_1 *- время прихода первого требования.*

Данное предположение означает, что вероятность перехода системы в нулевое состояние из любого другого положительна.

Выделим классы дисциплин.

Определение 1 *Дисциплина D принадлежит классу K_0, если из сходимости $Q_n = \sum\limits_{i=1}^{r} q_{ni} \xrightarrow{P} \infty$ при $n \to \infty$ следует сходимость $q_{ni} \xrightarrow{P} \infty$ при $n \to \infty$ для любого $i = 1, \ldots, r$. (Свойство 1a)*

Определение 2 *Дисциплина D принадлежит классу K_1, если выполнено свойство 1a и из сходимости $Q_n \to \infty$ (п.н.)(почти наверное) при $n \to \infty$ следует сходимость $q_{ni} \to \infty$ (п.н.) при $n \to \infty$ для любого $i = \overline{1, r}$. (Свойство 2a)*

2. Предельная теорема для случая $\rho > 1$

Условие стабильности для процессов W_n и Q_n для дисциплин класса K_0 имеет вид $\rho = \lambda b r^{-1} < 1$ и доказано в работе [3].

Целью данной работы является изучение асимптотического поведения системы в случае высокой загрузки, т.е. при $\rho \geq 1$. Сначала рассмотри случай $\rho > 1$.

Теорема 1 *Пусть*

$$E\tau_1^{2+\delta} < \infty, \quad E\xi_1^{2+\delta} < \infty, \quad E\eta_1^{2+\delta} < \infty \tag{1}$$

для некоторого $\delta > 0$. Если $\rho > 1$, то для любой дисциплины из класса K_1 процессы

$$\tilde{W}_T(t) = \frac{W(tT) - (\lambda b - r)tT}{\sigma_W \sqrt{T}}, \quad \tilde{Q}_T(t) = \frac{Q(tT) - (\lambda - \frac{r}{b})tT}{\sigma_Q \sqrt{T}}$$

слабо сходятся к Винеровскому процессу при $T \to \infty$ на любом конечном интервале $[\alpha, \beta]$. Здесь

$$\sigma_W^2 = b^2 \sigma_Q^2,\ \sigma_Q^2 = \sigma_A^2 + r\sigma_\eta^2 b^{-3},\ \sigma_A^2 = \sigma_\xi^2/\mu + a^2\sigma_\tau^2/\mu^3 - 2a cov(\xi, \tau)/\mu^2 \tag{2}$$

и σ_ξ^2 и σ_τ^2 - дисперсии ξ и τ соответственно.

Доказательство опирается на результаты, полученные в [2] (гл. 4.25), о связи между процессами $W(t)$ и $Q(t)$ и [1] (пар. 1.2 теорема 1) о необходимом и достаточном условии слабой сходимости заданного процесса к винеровскому.

Следствие 1 *Пусть* (1) *выполнено и $\rho > 1$. Тогда для многоканальной системы с одной очередью для любой консервативной дисциплины выполнена Теорема 1.*

Поскольку дисциплины D_1 и D_2 принадлежат классу K_1, для них выполнена Теорема 1. Пусть $W^D(t)$ - процесс $W(t)$ для системы с общей очередью и консервативной дисциплиной D. Для простоты предполагается $W^D(0) = 0$. Тогда выполнено стохастическое неравенство

$$W^{D_2}(t) \leq W^D(t) \leq W^{D_1}(t),\ t \geq 0,$$

откуда следует требуемое утверждение.

Следствие 2 *Пусть (1) выполнено и $\rho > 1$. Тогда теорема 1 верна для дисциплин D_3, D_4, D_5.*

Для D_3 и D_4 утверждение следует из сходимости $q_i(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ (п.н.), $i = \overline{1,r}$. Для D_5 утверждение было доказано в [3].

3. Предельная теорема в случае $\rho = 1$

Теорема 2 *Пусть* (1) *выполнено и $\rho = 1$. Тогда для системы с общей очередью и дисциплиной FIFO нормированный процесс*

$$\hat{Q}_T(t) = \frac{Q(tT)}{\sigma_Q\sqrt{T}}$$

слабо сходится к абсолютному значению Винеровского процесса при $T \to \infty$ на любом конечном интервале $[\alpha, \beta]$. Здесь σ_Q определено соотношением (2).

Следствие 3 *Пусть* (1) *выполнено и $\rho = 1$. Тогда для любой дисциплины $D \in K_2$ нормированное число требований на j-ом приборе*

$$\hat{q}^T_{j_D}(t) = \frac{q_{j_D}(tT)}{\sigma_{q_D}\sqrt{T}}$$

слабо сходится к абсолютному значению $v_j(t)$ Винеровского процесса при $T \to \infty$ на любом конечном интервале $[\alpha, \beta]$. Здесь

$$\sigma^2_{q_D} = \sigma^2_{A_D} + \frac{\sigma^2_\eta}{b^3}.$$

4. Заключение

В данной работе была рассмотрена система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком и различными дисциплинами обслуживания в случае высокой загрузки ($\rho \geq 1$). Была доказана сходимость нормированных процессов длины очереди и остаточного времени обслуживания к Винеровскому процессу и даны некоторые примеры. Существует множество направлений для будущих исследований.

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 17-01-00468.

Литература

1. *Borovkov A.* Asymptotic methods in Queueing Theory. — Chichester: Wiley, 1984.
2. *Borovkov A.* Stochastic processes in Queueing Theory. — Springer-Verlag, 1976.
3. *Grishunina S. A.* Queueing systems with different service disciplines // International Conference "Supercomputer Simulations in Science and Engineering", Moscow, 2016.

UDC 519.2

Limit theorems for queueing systems with different service disciplines

S. A. Grishunina[*†]

[*] *Department of Probability Theory,*
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia;
Department of applied mathematics
[†] *Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research*
University Higher School of Economics,
34 Tallinskaya Street, 123458, Moscow, Russia

In this paper a multi-server queueing system with regenerative input flow and independent service times with finite means is studied. We consider queueing systems with various disciplines of the service performance: systems with a common queue and systems with individual queues in front of the servers. In the second case an arrived customer chooses one of the servers in accordance to a certain rule and stays in the chosen queue up to the moment of its departure from the system. We define some classes of disciplines and analyze the asymptotical behaviour of a multi-server queueing system in a heavy-traffic situation (traffic rate $\rho \geq 1$). The main result of this work is limit theorems concerning the weak convergence of scaled processes of waiting time and queue length to the process of the Brownian motion for the case $\rho > 1$ and its absolute value for the case $\rho = 1$.

Keywords: Queueing System, Heavy-traffic, Limit Theorems, Service Disciplines.