УДК 519.214

О предельных теоремах А. Д. Соловьева для регенерирующих процессов

В. В. Козлов*

* *Кафедра теории вероятностей,*
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992

Аннотация. Обсуждаются два наиболее важных направления в исследованиях А.Д.Соловьёва.

Ключевые слова: асимптотическое поведение момента наступления редкого события, регенерирующий процесс, скорость сходимости, дисциплины обслуживания, ТМО.

В настоящей работе предлагается обсудить два направления исследований А. Д. Соловьева и наметить возможные пути их продолжения.

Первое направление связано с предложенным им методом изучения асимптотического поведения момента наступления редкого события в регенерирующем процессе [1, 2]. Приводим формулировку А. Д. Соловьева.

Пусть $\varkappa(t)$ — регенерирующий процесс и $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$ — последовательные моменты регенерации $\varkappa(t)$, $\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} t_n - t_{n-1}$, $n \geqslant 1$. На каждом периоде регенерации $[t_{n-1}, t_n]$ в некоторый момент $t_{n-1} + \eta_n$ может появится событие A_n, причем событие A_n и η_n определены на классе траекторий $\{\varkappa(t); t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n\}$ и не зависят от номера n. Задача состоит в том, чтобы исследовать асимптотическое поведение момента первого наступления события A_n — случайной величины τ, когда вероятность наступления этого события на одном периоде регенерации стремится к нулю.

Введем обозначения: χ_n — индикатор события A_n,

$$\zeta_n = \xi_n(1 - \chi_n) + \eta_n \chi_n, \quad F(x) = \mathsf{P}\{\zeta_n < x\},$$

$$\phi_-(z) = \mathsf{M} e^{-z\zeta_n} \chi_n,$$

$$\phi_+(z) = \mathsf{M} e^{-z\zeta_n} (1 - \chi_n),$$

$$\phi(z) = \phi_-(z) + \phi_+(z) = \mathsf{M} e^{-z\zeta_n},$$

$$\phi_-(0) = \mathsf{P}\{A_n\} = q,$$

$$\overline{q} = \sup_{z \geqslant 0} \frac{q - \phi_-(z)}{1 - \phi(z)}, \quad q_0 = \max(q, \overline{q}).$$

Теорема 1 *Если распределение величины* (ξ, η, χ) *меняется так, что*
1) $q > 0$, $q_0 \to 0$;
2) для некоторого нормирующего множителя γ *величина* $\gamma\tau$ *сходится к собственной случайной величине, то*

$$\lim \mathsf{M} e^{-\gamma z \tau} = \frac{1}{1+\omega(z)}, \tag{1}$$

где

$$\omega(z) = \int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-zx}}{x} dP(x)$$

$P(x)$ *возрастает,* $P(0) = 0$ *и* $\int\limits_1^\infty \frac{dP(x)}{x} < \infty$.

Для сходимости к распределению (1) *необходимо и достаточно*

$$\lim \int\limits_0^x \frac{t}{q} dF\left(\frac{t}{\gamma}\right) = P(x).$$

К классу (1) принадлежит, естественно, и экспоненциальное распределение. Достаточные условия сходимости к этому распределению дает

Теорема 2

$$\lim_{\overline{\alpha}_p \to 0} \mathsf{P}\left\{\frac{q\tau}{T} > x\right\} = e^{-x},$$

где

$$T = \mathsf{M}\xi, \quad \overline{\alpha}_p = \left[\frac{\mathsf{M}\xi^p}{(\mathsf{M}\xi)^p}\right]^{\frac{1}{p-1}} \cdot q, \quad 1 < p \leqslant 2.$$

А. Д. Соловьевым оценивается, также, скорость сходимости величины $\tau/\mathsf{M}\tau$ к экспоненциальному распределению.

Теорема 3 *Если при некотором* p: $2 < p \leqslant 3$ *существует* $\mathsf{M}\zeta^p = m_p$, *то*

$$\left|\mathsf{P}\left\{\frac{\tau}{\mathsf{M}\tau} < t\right\} - 1 + e^{-t}\right| < \frac{c}{p-2} \cdot \beta_p,$$

где $c < 24$ *— абсолютная постоянная,*

$$\beta_p = \max\left[m_p^{1/(p-1)} \cdot \frac{q_2}{m_2}, \alpha_p\right]$$

$$\alpha_p = \left[\frac{\mathsf{M}\zeta^p}{(\mathsf{M}\zeta)^p}\right]^{\frac{1}{p-1}} \cdot q, \quad q_2 = \mathsf{M}\zeta^2 \cdot \chi, \quad m_2 = \mathsf{M}\zeta^2.$$

К этим результатам А. Д. Соловьева примыкает, опираясь на них, работа [4].

Пусть на последовательности вероятностных пространств $(\Omega(\nu), \mathcal{B}(\nu), \mathcal{P}(\nu))$, $\nu = 1, 2, \ldots$ заданы:
1) однородная цепь Маркова $\{X_n(\nu), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\}$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}(\nu), \mathcal{F}(\nu))$,
2) последовательность неотрицательных сл. в. $\{U_n(\nu)\}$,
3) последовательность сл. в. $\{\delta_n(\nu)\}$, принимающих значения 0 или 1.

Допустим, что выполнены следующие условия (I) — (V) (будем опускать в обозначениях зависимость от ν — индекса схемы серий).
(I) При некотором фиксированном $r \geqslant 0$

$$\mathcal{P}(X_{n+r+i} \in A_i, U_{n+r+i} \in B_i, \delta_{n+r+i} = e_i, 1 \leqslant i \leqslant j | X_k, U_k, \delta_k, k \leqslant n) =$$

$$= \mathcal{P}(X_{n+r+i} \in A_i, U_{n+r+i} \in B_i, \delta_{n+r+i} = e_i, 1 \leqslant i \leqslant j | X_n),$$

n, j — любые, $A_i \in \mathcal{F}$, B_i — борелевские, $e_i = 0 \vee 1$ также любые, и

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(X_{n+r+i} \in A_i, U_{n+r+i} \in B_i, \delta_{n+r+i} = e_i, 1 \leqslant i \leqslant j | X_n = x), \\ &x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2}$$

не зависит от n.
(II) Цепь $\{X_n\}$ эргодична и для некоторого $0 < \rho < 1$ справедлива равномерная оценка скорости сходимости к стационарному распределению $\pi(\cdot)$:

$$|P^{(k)}(x, A) - \pi(A)| \leqslant \rho^{k-1}, \quad x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{F}, k \geqslant 1,$$

$P^{(k)}(x, A)$ — переходная функция цепи за k шагов.

Будем условную вероятность (2) при $n = 0$ обозначать через $\mathcal{P}_x(\cdot)$, а соответствующее условное математическое ожидание через $\mathsf{M}_x(\cdot)$. Для стационарного значения X_0 соответствующие обозначения — $\mathcal{P}^*(\cdot)$ и $\mathsf{M}^*(\cdot)$.
(III) Для некоторой бесконечно малой последовательности $\{\alpha\} = \{\alpha(\nu)\}$

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{P}_x(\delta_{r+1} = 1) \leqslant \alpha \to 0, \quad \nu \to \infty,$$

и при любых x и ν

$$\mathcal{P}_x \left(\sum_{i=1}^{k} \delta_{r+i} \geqslant 1 \right) \to 1, \quad k \to \infty.$$

(IV) Для некоторого $\gamma > 1$ конечен момент $\mu_\gamma = \mathsf{M}^* U_{r+1}^\gamma$ при всех ν.
(V) Конечна величина $\mathfrak{M} = \sup\limits_{x \in \mathcal{X}} \mathsf{M}_x(U_{r+1})$.

Будем изучать асимптотическое поведение при $\nu \to \infty$ величин

$$N = \min\{n > r | \delta_n = 1\} \quad \text{и} \quad T = \sum_{i=r+1}^{N} U_i.$$

Теорема 4 *Пусть выполнены условия (I) — (V), постоянная γ в условии (IV) лежит в пределах $1 < \gamma \leqslant 2$ и*

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \rho < 1 \tag{3}$$

$$\left(\frac{\mu_\gamma}{\mu_1^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \alpha |\ln \alpha|^4 \to 0, \quad \nu \to \infty$$

$$\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right) \cdot \alpha |\ln \alpha|^{3/2} \to 0, \quad \nu \to \infty$$

Тогда равномерно по распределению начального отрезка процесса (X_n, U_n, δ_n), $n \leqslant r$ имеют место соотношения

$$\mathcal{P}\left(\frac{T}{\mathsf{M}T} > t\right) \to e^{-t}, \quad \nu \to \infty,$$

и

$$\mathsf{M}T \sim \mathsf{M}^* T.$$

Теорема 5 *Пусть выполнены условия (I) — (V), $\gamma = 3$, (3) и*

$$\left(\frac{\mu_3}{\mu_1^3}\right)^{1/2} \cdot \alpha^{1-4/7} \to 0, \quad \nu \to \infty$$

$$\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right) \cdot \alpha^{1-4\theta/7} \to 0, \quad \nu \to \infty, \quad \theta = 2 \ln |\ln \alpha| / |\ln \alpha|$$

Тогда

$$\sup_{t \geqslant 0} \left| \mathcal{P}\left(\frac{T}{\mathsf{M}T} > t\right) - e^{-t} \right| \leqslant^* 26 \frac{(\mu_6)^{7/12}}{\mu_1^{7/2}} \cdot \alpha^{2/7} |\ln \alpha|^{4/7} + 2 \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right)^{1/2} |\ln \alpha|^{4/7}.$$

(неравенство $a(\nu) \leqslant^* b(\nu)$ означает: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a(\nu)}{b(\nu)} \leqslant 1$)

Второе направление работ А. Д. Соловьева хорошо отражено в его обзорной статье [3], и связано с изучением основных характеристик процесса обслуживания С. М. О. при различных дисциплинах обслуживания. Он ввел понятие скорости обслуживания, охватывающее большой круг известных дисциплин. С этим понятием А. Д. Соловьев открыл огромное поле научно-исследовательской деятельности оптимизации, включая асимптотической, показателей надежности систем в определенных классах изменения их параметров. Одна из таких дисциплин — обслуживание наикратчайшего требования — привлекает к нахождению стационарных характеристик различных систем.

Литература

1. *Соловьев А. Д.* Системы массового обслуживания с быстрым восстановлением. — Дисс. д. физ.-мат. наук, Москва, 1971.
2. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1971. — No. 6. — С. 79–89.
3. *Соловьев А. Д.* Анализ системы $M|G|1|\infty$ для различных дисциплин обслуживания // Сборник "Теория массового обслуживания". — М.: ВНИИСИ, 1981. — С. 172–178.
4. *Козлов В. В.* Некоторые асимптотические задачи теории массового обслуживания. — Дисс. к. физ.-мат. наук, Москва, 1979.

UDC 519.214

On limit theorems of A. D. Soloviev for regenerative processes

V. V. Kozlov*

* *Department of Probability Theory,*
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

The two most important directions in research of A. D. Soloviev are discussed.

Keywords: asymptotic behavior of occurrence of rare events, regenerating process, convergence rate, discipline of service, Queuing theory.