УДК 519.226

Байесовский тест в задаче многоканального обнаружения сигналов

Е. В. Бурнаев*†, Г. К. Голубев†‡

* *Сколковский институт науки и технологий, ул. Нобеля, д. 3, Москва, Россия, 143026, E-mail: e.burnaev@skoltech.ru*

† *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Большой Каретный переулок, д.19, стр. 1., Москва, 127051, Россия, E-mail: golubev.yuri@gmail.com*

‡ *Университет Экс-Марсель, I2M, UMR 7373, Марсель, 13453, Франция, E-mail: golubev.yuri@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается задача статистического обнаружения сигнала с неизвестной энергией в многоканальной системе на фоне белого гауссовского шума. Предполагается, что сигнал может появиться в любом из каналов с известной малой априорной вероятностью. Задача состоит в том, чтобы на основе зашумленных наблюдений выходов всех каналов решить присутствует ли сигнал в одном из каналов или наблюдается чистый шум. В работе вычисляются предельные распределения тестовых статистик теста максимальной апостериорной вероятности и оптимального байесовского теста, находятся множества не обнаруживаемых ими сигналов.

Ключевые слова: байесовский тест, тест на основе отношения правдоподобия, многоканальное обнаружение сигналов, обнаружение разладки.

1. Введение. Постановка задачи

В работе рассматривается одна из простейших задач статистического обнаружения сигнала в многоканальной системе. С математической точки зрения это задача о проверке простой гипотезы H_0, которая состоит в том, что наблюдаемый вектор $Y \in \mathbb{R}^\infty$ представляет собой дискретный белый гауссовский шум $\mathrm{H}_0 : Y = \sigma\xi$, где $\xi = (\xi_i, \xi_2, \dots)^\top$ – стандартный белый гауссовский шум, т.е. вектор в $\mathbb{R}^\infty$, компонентами которого являются независимые стандартные гауссовские случайные величины, а $\sigma > 0$ – известный уровень шума.

Альтернативой гипотезе H_0 является $\mathrm{H}_1 : Y = S + \sigma\xi$, $S \in \mathbb{S}$, где $\mathbb{S}$ – подмножество сигналов в $\mathbb{R}^\infty$, которые могут иметь только лишь одну отличную от нуля компоненту. Точнее, пусть $\mathbb{S}_k$ одномерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^\infty$, образованное из векторов, у которых все координаты кроме k-ой равны нулю. Тогда $\mathbb{S} = \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{S}_k$. Кроме того, предполагается, что сигнал $S \in \mathbb{S}$ является случайным, не зависящим от ξ и таким, что $\mathbf{P}\{S \in \mathbb{S}_k\} = \bar{\pi}_k$, где априорные вероятности $\bar{\pi}_k$ считаются известными.

Первый автор поддержан грантом РФФИ 16-29-09649 офи_м, второй автор поддержан грантом Российского научного фонда (проект No. 14-50-00150).

Таким образом, задача состоит в том, чтобы по наблюдениям Y проверить простую гипотезу H_0 против сложной альтернативы H_1.

Напомним, что статистическим тестом называется любая измеримая функция $\phi(Y)$, принимающая значения из отрезка $[0,1]$. Далее для простоты будем предполагать, что эта функция принимает только два значения $\{0,1\}$: если $\phi(Y)=0$, то это означает, что принимается гипотеза H_0, а если $\phi(Y)=1$, то принимается альтернатива H_1.

Качество статистического теста принято измерять вероятностями ошибок первого рода α_ϕ (вероятность ложной тревоги) и второго рода β_ϕ (пропуска сигнала), которые определяются соответственно следующим образом: $\alpha_\phi = \mathbf{P}_0\{\phi(Y)=1\}$, $\beta_\phi(S)=\mathbf{P}_S\{\phi(Y)=0\}$. Здесь $\mathbf{P}_0$ – вероятностная мера, порожденная наблюдениями Y при H_0, а $\mathbf{P}_S$ – мера, порожденная Y при H_1 при фиксированном векторе S.

Как правило, мы хотим при заданной вероятности ложной тревоги построить тест с минимальной вероятностью пропуска сигнала. К сожалению, решить эту задачу в общем случае, как правило, невозможно поскольку вероятность ошибки второго рода зависит от S. Однако всегда можно построить статистический тест, который при заданной вероятности ложной тревоги, минимизирует среднюю вероятность ошибки второго рода $\bar{\beta}_\phi(Q) = \int_{\mathbb{S}} Q(S)\beta_\phi(S)\,dS$, где положительная функция $Q(\cdot)$ такова, что $\displaystyle\int_{\mathbb{S}} Q(S)\,dS = 1$. Подчеркнем, что вероятностная плотность $Q(\cdot)$ должна обязательно отражать априорную информацию о сигнале S. Поскольку предполагается, что $S \in \mathbb{S}_k$ с вероятностью $\bar{\pi}_k$, а $\mathbb{S}_k$ является одномерным подпространством, то в рассматриваемой задаче $\int_{\mathbb{S}} Q(S)\beta_\phi(S)\,dS = \sum_{k=1}^\infty \bar{\pi}_k \int_{-\infty}^{\infty} q_k(S_k)\beta_\phi(0,\ldots,0,S_k,0,\ldots)\,dS_k$. Здесь $q_k(\cdot)$ – априорная плотность распределения сигнала S_k в k-ом канале.

Тест, минимизирующий среднюю вероятность ошибки второго рода, имеет вид: $\phi(Y) = \mathbf{1}\left\{ \sum_{k=1}^\infty \pi_k \int_{-\infty}^\infty q_k(s) l(s;Y_k)\,ds \ge t_\alpha \right\}$, где критический уровень t_α выбирается так, чтобы обеспечить заданное значение вероятности ложной тревоги α, а $l(s;Y_k) = \exp(-(s^2-2sY_k)/(2\sigma^2))$ – отношение правдоподобия для k-го канала.

Поскольку у нас, как правило, нет никакой априорной информации о распределении ненулевой компоненты сигнала, то математически этот факт можно выразить предположив, например, что эта компонента имеет гауссовское распределение с большой дисперсией, т.е. $q_k(s) = (\sqrt{2\pi}A)^{-1}\exp(-s^2/2A^2)$, где $A \gg \sigma$. Тогда, при $A^2/\sigma^2 \to \infty$ мы приходим к следующему байесовскому тесту:

$$\phi^\circ(Y) = \mathbf{1}\left\{ \sum_{k=1}^\infty \bar{\pi}_k \exp\left(\frac{Y_k^2}{2\sigma^2}\right) \ge t_\alpha^\circ(\bar{\pi}) \right\},$$

где критическое значение $t_\alpha^\circ(\bar\pi)$ выбирается так, чтобы гарантировать вероятность ложной тревоги равную α. Здесь и далее $\bar\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)^\top$ – вектор априорных вероятностей.

На практике наряду с байесовским тестом часто используется тест максимальной апостериорной вероятности (МАВ)

$$\phi^*(Y) = \mathbf{1}\left\{\max_{i\ge 1}\left[\bar\pi_i \exp\left(\frac{Y_i^2}{2}\right)\right] \ge t_\alpha^*(\bar\pi)\right\},$$

где $t_\alpha^*(\bar\pi)$ — соответствующий критический уровень.

Цель этой статьи — выяснить в каком смысле и насколько байесовский тест лучше теста МАВ. Для этого нам потребуется дополнительная гипотеза об априорных вероятностях $\bar\pi_k$. Будем предполагать, что $\bar\pi_k = \bar\pi_k^n = \bar\pi\left(\frac{k}{n}\right)\Big/\sum_{s=1}^\infty \bar\pi\left(\frac{s}{n}\right)$, где $\bar\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ — неотрицательная, ограниченная функция такая, что $\int_0^\infty \bar\pi(x)\,dx = 1$, $H(\bar\pi) = \int_0^\infty \bar\pi(x)\log\frac{1}{\bar\pi(x)}\,dx < \infty$. Грубо говоря, это предположение означает, что априорные вероятности малы, точнее, имеют порядок n^{-1}, но при этом энтропия априорного распределения ограничена величиной $\log(n) + C$, где $C < \infty$, при любых $n > 1$. Фактически, величина n является эффективной размерностью задачи и далее нас будут интересовать свойства статистических тестов при $n \to \infty$.

Задача обнаружения сигнала в многоканальных системах имеет многочисленные технические приложения и богатую историю. Разнообразные статистические постановки и варианты этой задачи рассмотрены, например, в [1]. Обнаружение сигнала с известной энергией в гауссовских каналах с помощью метода максимального правдоподобия детально изучено в [2], § 8.2.

По-видимому, одной из первых математических работ о байесовском обнаружении сигнала в многоканальных системах является [3]. В этой работе изучалась статистическая модель, состоящая из n рэлеевских каналов. Задача байесовского обнаружения сигналов с известной энергией в гауссовских каналах рассматривалась в [4]. В этих работах предполагалось, что сигнал появляется в одном из n каналов с равными априорными вероятностями. Отметим также, что монография [5] содержит много интересных и полезных фактов об обнаружения сигнала с многоканальных системах с гауссовскими шумами.

Подчеркнем, что в настоящей работе изучается ситуация когда априорные вероятности появления сигнала в различных каналах различны, а его энергия неизвестна и является мешающим параметром. Поскольку статистическая задача обнаружения сигнала в многоканальной системе является задачей большой размерности, то в отличии от статистических задач низкой размерности, ее решение существенным образом зависит от имеющейся априорной информации об обнаруживаемых сигналах и поэтому результаты, представленные в настоящей работе довольно существенно отличаются от результатов в цитируемых выше работах.

2. Основные результаты

При $n \to \infty$ критический уровень теста МАВ $\log[t^*_\alpha(\bar{\pi}^n)] = \log \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} - \frac{1}{2}\log\left[\log\left(\frac{n}{\sqrt{\pi}\alpha}\right)\right] + o(1)$. Статистические свойства теста МАВ, связанные с ошибкой второго рода, определяются множеством в $\mathbb{R}^\infty$: $\Pi^*_{\bar{\pi}^n,\alpha} = \left\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_i^2 \le 2\sigma^2\left[\log\frac{1}{\bar{\pi}_i^n} + \log\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} - \frac{1}{2}\log\left(\log\frac{n}{\sqrt{\pi}\alpha}\right)\right]\right\}$.

Можно показать, что никакой сигнал из $\Pi^*_{\bar{\pi}^n,\alpha} \cap \mathbb{S}$ не может быть обнаружен с помощью теста МАВ. Действительно, для теста МАВ выполнено, что $\lim_{n\to\infty}\inf_{S\in\Pi^*_{\bar{\pi}^n,\alpha}\cap\mathbb{S}} \beta_{\phi^*}(S) \ge \frac{1-\alpha}{2}$.

При $n \to \infty$ критический уровень байесовского теста $t^\circ_\alpha(\bar{\pi}^n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[b_n + \frac{t^\circ_\alpha + H(\bar{\pi})}{b_n}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log(n)}}\right)$, где t°_α удовлетворяет равенству $\mathbf{P}\{\zeta^\circ \ge t^\circ_\alpha\} = \alpha$, $\zeta^\circ = \left[\left(\sum_{s=1}^k e_s\right)^{-1} - \frac{1}{k}\right] + \gamma$, e_s — независимые, стандартные экспоненциально распределенные случайные величины, $\gamma = 0,577215\ldots$ – постоянная Эйлера, $b_n = \left[2\log\frac{n}{\sqrt{\pi\log(n)}}\right]^{1/2}$.

Как и с тестом МАВ свяжем с байесовским тестом следующий параллелепипед: $\Pi^\circ_{\bar{\pi}^n} = \left\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_i^2 \le 2\sigma^2\log\frac{1}{\bar{\pi}_i^n\sqrt{\pi\log(n)}}\right\}$. Аналогично, для ошибки второго рода байесовкого теста выполнено следующее неравенство: $\lim_{n\to\infty}\inf_{S\in\Pi^\circ_{\bar{\pi}^n}\cap\mathbb{S}} \beta_{\phi^\circ}(S) \ge \frac{1-\alpha}{2}$.

3. Заключение

В работе вычисляются для тестовых статистик теста максимальной апостериорной вероятности и оптимального байесовского теста находятся множества не обнаруживаемых ими сигналов. Заметим, что при больших n разница между квадратами сторон параллелепипедов не обнаруживаемых сигналов $\Pi^*_{\bar{\pi}^n,\alpha}$ и $\Pi^\circ_{\bar{\pi}^n}$ не зависит ни от номера стороны, ни от n и равна $\delta(\alpha) = 2\sigma^2\log\frac{1}{\alpha}$. Статистический смысл этой величины прозрачен и означает, что байесовский тест по сравнению с тестом МАВ позволяет обнаруживать сигналы с энергиями меньшими на величину $\delta(\alpha)$. Отметим также, что в отличии от теста МАВ, параллелепипед сигналов, не обнаруживаемых байесовским тестом, не зависит от вероятности ложной тревоги α.

Литература

1. Теория обнаружения сигналов // Под ред. П. А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. 440 С.
2. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь. — М.: Советское радио, 1974. — 720 с.
3. *Добрушин Р. Л.* Одна статистическая задача теории обнаружения сигнала на фоне шума в многоканальной системе, приводящая к устойчивым законам распределения // Теория вероятн. и ее примен. — 1958. — Т. 3, вып. 2. — С. 173–185.
4. *Бурнашев М. В., Бергамов И. А.* Об одной задаче обнаружения сигнала, приводящей к устойчивым распределениям // Теория вероятн. и ее примен. — 1990. — Т. 35, вып. 3. — С. 557–560.
5. *Ingster Yu. I., Suslina I. A.* Nonparametric Goodness-of-Fit Testing Under Gaussian Models. — Springer Science & Business Media, 2003.
6. *Pyke R.* Spacings (with discussion) // J. R. Statist. Soc. — 1965. — Vol. 7. — P. 395–449.
7. *Бурнашев М. В., Голубев Г. К.* О предельных распределениях момента первого достижения высокого уровня // Пробл. передачи информ. — 2015. — Т. 51, вып. 2. — С. 67—85.

UDC 519.226

Bayesian Test for Multi-Channel Signal Detection Problem

E. V. Burnaev*†, G. K. Golubev†‡

* *Skolkovo Institute of Science and Technology,*
3 Nobel Street, Moscow 143026, Russia,
E-mail: e.burnaev@skoltech.ru
† *Institute for Information Transmission Problems,*
Bolshoy Karetny per. 19, build.1, Moscow 127051 Russia
‡ *Aix-Marseille Université,*
I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France,
E-mail: golubev.yuri@gmail.com

We consider a problem of detection a signal with unknown energy in a multi-channel system, containing a big number of channels. We assume that the signal can appear in any of channels with a known small prior probability. Using observations from all channels we would like to detect whether the signal is presented in one of the channels or we observe pure noise. In our work we describe and compare statistical properties of maximum posterior probability test and optimal Bayesian test. In particular, for these tests we obtain limiting distributions of test statistics and define sets of undetectable signals.

Keywords: Bayesian test, multi-channel signal detection, change-point detection, Likelihood ratio test.