УДК 517.925.51

О свойствах системы уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах с учетом силы Кориолиса

М. К. Турцынский*

* *Кафедра дифференциальных уравнений,*
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992

Аннотация. Получены первые интегралы системы уравнений двумерной модели движения газа с учетом силы Кориолиса для движений с однородной деформацией. Найдены соответствия между положениями равновесия системы в эйлеровых и лагранжевых координатах. Показано, что задача может быть сведена дифференциальному уравнению первого порядка.

Ключевые слова: газовая динамика, лагранжевы координаты, вихревое движение, устойчивость положения равновесия.

1. Введение

Мы рассматриваем двумерную модель расширения газового облака в вакуум в лагранжевых координатах (т.е. в системе координат, связанной с частицами среды) в присутствии силы Кориолиса для специального класса движений с однородной деформацией. В статье [2] решается аналогичная задача при отсутствии вращения координатной системы. В [2] было показано, что эта модель может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, для элементов матрицы 2×2 была найдена система первых интегралов. В некоторых случаях решение этой системы может быть найдено явно. Мы решаем ту же задачу, принимая во внимание силы Кориолиса.

2. Основная часть

Мы рассматриваем систему уравнений газовой динамики (1), задающую движение политропного Ньютоновского газа в эйлеровых координатах, на плотность $\varrho(t,x)$, скорость $\mathbf{u}(t,x)$ и давление $P(t,x)$ газа:

$$\varrho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{u}) + \nabla P = 0,$$
$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t P + (\mathbf{u}\cdot\nabla P) + \gamma P \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{L} = lL$, $L = (L_{ij})_{i,j=1..2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \in (1,2]$ – показатель адиабаты, $l > 0$ – параметр Кориолиса; ∇ и div – градиент и дивергенция по пространственным переменным, $P = C\rho^{\gamma}$, где $C = \text{const}$.

Введем $\pi = P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, $c_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}C^{\frac{1}{\gamma}}$ и получим:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathcal{L}\,\mathbf{u} + c_0\,\nabla\pi = 0,\\ \partial_t\pi + (\nabla\pi\cdot\mathbf{u}) + (\gamma-1)\,\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \ 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В дальнейшем мы рассмотрим специальный класс решений системы (2), соответствующим движению с однородной деформацией. А именно, будем искать решения в виде:

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = Q\mathbf{x};\quad Q = \begin{pmatrix} a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{pmatrix};$$
$$\pi(t,\mathbf{x}) = A(t)x_1^2 + B(t)x_1x_2 + C(t)x_2^2 + K(t).$$

Тогда они удовлетворяют следующей системе на матрицы Q и

$$R = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t)\\ \frac{1}{2}B(t) & C(t), \end{pmatrix}:$$

$$\begin{aligned} \dot R + RQ + Q^TR + (\gamma-1)\mathbf{tr}QR = 0,\\ \dot Q + Q^2 + lLQ + 2c_0R = 0,\ \dot K + 2(\gamma-1)\mathbf{tr}QK = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Систему (3) можно переписать в лагранжевых координатах, получим:

$$F''_{ik} + \frac{\partial U}{\partial F_{ik}} = \sum_j \mathcal{L}_{ij}F_{jk}, \tag{4}$$

где $F = (F_{ij})_{i,j=1..2}$ - матрица перехода от лагранжевых координат частицы газа x_i к эйлеровым w_i, т.е. $x_i = \sum_k F_{ik}w_k$, U – внутренняя энергия частиц газа, зависящая только от определителя матрицы F, т.е. $U = U(\det F)$, производные берутся по времени. В статье [2] показывается, что в случае $l = 0$ для системы (4) существуют три первых интеграла (5)–(6):

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}(F'_{ik})^2 + U = E;\ F_{11}F'_{21} + F_{12}F'_{22} - F_{21}F'_{11} - F_{22}F'_{12} = J; \tag{5}$$

$$F_{11}F'_{12} + F_{21}F'_{22} - F_{12}F'_{11} - F_{22}F'_{21} = K. \tag{6}$$

Кроме того, если положить, что $U = U_0(\det F)^{-1}$ (это соответствует случаю $\gamma = 2$), то можно предъявить еще один первый интеграл G системы (4): $G = \sum_{i,k}F_{ik}^2 = 2Et^2 + At + B$. С использованием этих тождеств систему (4) можно разрешить и выразить ответ через эллиптические интегралы.

В статье [1] показывается, что система (3) в эйлеровых координатах имеет единственную особую точку $a = d = 0$, $b = -c = b^*$, $A = C = A^* = \frac{b^*(b^*-l)}{2c_0}$, $B = 0$. Найдем соответствие между положением равновесия в эйлеровых и лагранжевых координатах. Запишем соотношение связи между эйлеровыми и лагранжевыми координатами: $\vec{\mathbf{w}} = F^{-1}\vec{\mathbf{x}}$, значит, $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{x}'} = F'\vec{\mathbf{w}} = F'F^{-1}\vec{\mathbf{x}} = Q\vec{\mathbf{x}}$ (условие на наш класс решений), где $F'F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b^* \\ -b^* & 0 \end{pmatrix}$ в положении равновесия и, значит, $F = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b^*t & \sin b^*t \\ -\sin b^*t & \cos b^*t \end{pmatrix}$ в лагранжевых координатах.

В дальнейшем всюду предполагаем, что $l > 0$.

Утверждение 1. Система (4) обладает тремя первыми интегралами $\frac{1}{2}\sum_{i,k}(F'_{ik})^2 + U = E = \mathrm{const}$; $J + \frac{l}{2}\,G = A = \mathrm{const}$; $K - l\det F = B = \mathrm{const}$. В предположении $U = U_0(\det F)^{-1}$ (это соответствует случаю $\gamma = 2$) существует еще один первый интеграл $G = \tilde{C}_1\cos lt + \tilde{C}_2\sin lt + \frac{4E+2lA}{l^2}$.

Доказательство утверждения 1 по сути сводится к дифференцированию первых интегралов и дальнейшему использованию системы (4). Чтобы получить интеграл энергии, достаточно умножить первое уравнение системы на F'_{11}, второе на F'_{12}, третье на F'_{21}, четвертое на F'_{22} и произвести почленное сложение уравнений. Чтобы получить второе соотношение, достаточно продифференцировать J и воспользоваться тем фактом, что в силу $U = U(\det F)$ выражение $-F_{11}\frac{\partial U}{\partial F_{21}} - F_{12}\frac{\partial U}{\partial F_{22}} + F_{21}\frac{\partial U}{\partial F_{11}} + F_{22}\frac{\partial U}{\partial F_{12}}$ равно 0. Из аналогичных соображений получается и третье из указанных соотношений.
Для получения четвертого соотношения достаточно дважды продифференцировать G и воспользоваться для U указанного вида теоремой Эйлера об однородных функциях. В результате приходим к уравнению: $G'' + l^2G = 4E + 2lA$, решения которого записываются в виде $G(t) = \tilde{C}_1\cos lt + \tilde{C}_2\sin lt + \frac{4E+2lA}{l^2}$.

Мы выяснили таким образом, что для исследования системы (4) достаточно рассмотреть систему (7), составленную из 4 найденных первых интегралов, указанных в утверждении 1:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}(F'_{ik})^2 + \frac{U_0}{\det F} = E; \sum_{i,k}F_{ik}^2 = \tilde{C}_1\cos lt + \tilde{C}_2\sin lt + \frac{4E+2lA}{l^2};$$

$$F_{11}F'_{12} + F_{21}F'_{22} - F_{12}F'_{11} - F_{22}F'_{21} - l\det F = B; \qquad (7)$$

$$F_{11}F'_{21}+F_{12}F'_{22}-F_{21}F'_{11}-F_{22}F'_{12}+\frac{l}{2}\sum_{i,k}F_{ik}^2=A.$$

Утверждение 2. Замена вида $\begin{pmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v\\ \sin v & \cos v\end{pmatrix}\times$ $\begin{pmatrix}s\cos u & 0\\ 0 & s\sin u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos w & -\sin w\\ \sin w & \cos w\end{pmatrix}$ приводит систему (7) к исследованию одного дифференциального уравнения первого порядка на функцию u.

Доказательство утверждения 2. Несложно проверить, что после указанной замены (см. [3]) мы приходим к системе (8):

$$\frac{s^2}{2}((u')^2+(v')^2+2\sin(2u)v'w'+(w')^2)+\frac{(s')^2}{2}+\frac{2U_0}{s^2\sin 2u}=E;$$

$$v'+\frac{l}{2}+\sin(2u)w'=\frac{A}{s^2};\ \sin(2u)(v'+\frac{l}{2})+w'=-\frac{B}{s^2}; \tag{8}$$

$$s^2=\tilde{C}_1\cos lt+\tilde{C}_2\sin lt+\frac{4E+2lA}{l^2}.$$

Как и следовало ожидать, s^2 явно находится из последнего соотношения. Разрешая пару уравнений на производные v и w, можно выразить v' и w' через u и $s(t)$. Подставляя указанные соотношения в первое уравнение, получаем требуемое дифференциальное уравнение первого порядка $u'(t)=\pm\sqrt{f(u,t)}$, где $f(u,t)=\dfrac{2E-(s')^2+Al}{s^2}-\dfrac{l^2}{4}-\dfrac{4U_0}{s^4\sin 2u}-\dfrac{A^2+B^2+2AB\sin 2u}{s^4\cos^2 2u}$.

Утверждение 3. В положении равновесия $\tilde{u}(t)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2B}{(2b^*-l)\tilde{s}^2(t)}$, где $\tilde{s}^2(t)=\tilde{C}_1^*\cos lt+\frac{4E+2lA}{l^2}$ и $\tilde{C}_1^*=\frac{4Ab^*(l-b^*)}{l^2(l-2b^*)}+\frac{4U_0(l-2b^*)}{Bl^2}$.

Отметим основные моменты **доказательства утверждения 3.** В самом деле, считая определитель F в положении равновесия и по определению (через замену, см. утверждение 2), получим: $\det F=\frac{1}{2}\tilde{s}^2\sin 2\tilde{u}=C_1C_4-C_2C_3=C$. Тем самым показано, что $\tilde{u}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2C}{\tilde{s}^2}$.

Выразим константу $\tilde{C}_2$ через начальные условия $F_{ij}(0)$ и $F'_{ij}(0)$, получим $\tilde{C}_2=\frac{2}{l}\sum_{i,j}F_{ij}(0)F'_{ij}(0)$. Подставляя теперь связь между начальными условиями в положении равновесия $F'_{11}(0)=b^*F_{21}(0)$, $F'_{21}(0)=b^*F_{22}(0)$, $F'_{21}(0)=-b^*F_{11}(0)$, $F'_{22}(0)=-b^*F_{12}(0)$ в выражение для $\tilde{C}_2$, получим $\tilde{C}_2^*=0$.

Аналогично, подстановкой начальных условий в первый интеграл B, проверяется, что $B=(2b^*-l)C$, откуда получаем выражение для константы C, отмеченное в утверждении.

3. Заключение

Предъявлена система первых интегралов для модели, задающей движение газа в лагранжевых координатах, в случае действия силы Кориолиса. Эта система интегралов позволяет значительно упростить решение системы, система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению первого порядка.

Литература

1. *Olga S. Rozanova O. S., Yu J.-L., Turzynsky M. K., Hu Ch.-K.* Nonlinear stability of two-dimensional axisymmetric vortices in compressible inviscid medium in a rotating reference frame // arXiv:1511.07039.
2. *Anisimov S. I., Lysikov Yu. I.* Expansion of a gas cloud in vacuum // PMM — 1970. — Vol. 34, no. 5. — P. 926–929.
3. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — Наука, 1980.

UDC 517.925.51

On the properties of the system of gas dynamics equations in Lagrangian coordinates with Coriolis force

M. K. Turzynsky*

* *Department of Differential Equations,*
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

We obtain first integrals of the system of equations of two-dimensional model of the gas motion taking into account the Coriolis force for motion with uniform deformation. We find correspondence between equilibria in Eulerian and Lagrangian coordinates. It is shown that the problem can be reduced to one differential equation of first order.

Keywords: gas dynamics, Lagrangian coordinates, vortex motion, stability of equilibria.