

Об асимптотике вероятностей больших уклонений некоторых частично или асимптотически однородных марковских цепей

М. В. Козлов *

* *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. Тематика точной асимптотики вероятностей больших уклонений марковских блужданий изучалась А.А. Боровковым в 1962–63 гг. прошлого столетия и активно разрабатывалась в последующем им самим и его школой. В докладе мы коснемся некоторых частично или асимптотически однородных в терминах Боровкова марковских цепей на прямой в крамеровском случае. В работе А.А. Боровкова, Д.А. Коршунова (2000) для частично однородной эргодической марковской цепи с правосторонним условием Крамера на шаг блуждания выведена точная асимптотика вероятностей больших уклонений. Некоторые дополнения к этому исследованию содержатся в работе [М.В. Козлов, ТВП, т. 58, в.1, 2013]. В серии работ М. В. Козлова, А.В. Шкляева изучалась асимптотика вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде. В докладе будут предложены некоторые возможные направления дальнейшей работы по указанным направлениям.

Ключевые слова: случайное блуждание, процесс ожидания, условие Крамера, большие уклонения максимума, условные предельные теоремы.

Рассмотрим частично однородные в терминологии А.А.Боровкова марковские цепи на прямой, то есть такие, что их переходные вероятности в пределах положительной полуоси такие же, как у случайного блуждания.

Пусть X - общее обозначение для шага блуждания $S(n)$. Предполагается, что преобразование Лапласа $R(h) = \exp(hX)$ конечно в некоторой правой полукрестности точки $h = 0$, а что математическое ожидание $\mathbb{E} X$ отрицательно. Всюду рассматривается так называемый крамеровский случай, когда существует такое H , что $R(h) = 1$.

Для максимума M случайного блуждания $S(n)$ в таком случае имеет место оценка Крамера-Лундберга $\mathbb{P}(M > x) \sim \exp(-Hx)$. Обозначим через $m(h)$ логарифмическую производную от $R(h)$ и через $h(t)$ обратную к ней функцию.

Введем случайный момент $T(x)$ первого пересечения блужданием $S(n)$ высокого уровня x . S.Asmtussen [1] доказал, что случайная величина $T(x)$ асимптотически нормальна со средним $x/m(h)$ и дисперсией, пропорциональной x . Им же установлена функциональная предельная теорема с броуновским мостом в качестве предела.

Наряду с большими отклонениями максимума крамеровского блуждания рассматривалась задача большого отклонения конца $S(n)$ на величину tn для $t > \mathbb{E}X$ (при любом знаке $\mathbb{E}X$). Окончательный результат здесь принадлежит В.В. Петрову [2].

А.А. Боровков, Д.А. Коршунов [3] исследовали асимптотику вероятностей больших отклонений для частично однородной марковской цепи в эргодическом случае. В этот класс попадает, в частности, процесс ожидания. Используя подходы этой работы, автор в публикации [3] исследовал асимптотику вероятностей больших отклонений максимума $M(n)$ отрезка процесса ожидания и предельное распределение момента $T(tn)$ первого пересечения процессом ожидания уровня tn . Используемые подходы приложимы и к неэргодическим частично однородным марковским цепям (с отрицательным $\mathbb{E}X$). При отсутствии ограничений на время блуждания оптимальный способ выйти на уровень tn состоит в движении вдоль прямой с угловым наклоном $m(H)$. Таким образом, если $t/m(H) < 1$, то вдоль этого направления (включая флуктуации в виде броуновского моста) и следует достигать уровня tn . В противном случае частично однородная марковская цепь проводит в течение времени, пропорциональном n , в некоторой окрестности точки 0. Тем самым, начинает играть роль части траектории, находящиеся на отрицательной полуоси. Мы проиллюстрируем в сообщении такую ситуацию на примере осциллирующего (а лучше сказать альтернирующего) случайного блуждания.

В работе [3] исследована логарифмическая асимптотика вероятностей больших отклонений для так называемых асимптотически однородных марковских цепей, то есть, когда по мере удаления от начала координат в положительную сторону переходные вероятности слабо сходятся к таковым для обычного случайного блуждания. Получения точной асимптотики в общем случае асимптотически однородных марковских цепей пока что вызывает затруднения. В этой связи интересны частные модели, для которых ее можно вывести. К ним относятся ветвящиеся процессы в случайной независимой среде (после перехода от процесса к его логарифму). На этот счет за последние годы появилось ряд работ автора и А.В. Шкляева. В сообщении мы остановимся на некоторых результатах для этих процессов.

Литература

1. *Asmussen S.* Conditioned limit theorems relating a random walk to its associate, with applications to risk reserve process and the GI/G/1 queue // *Adv. Appl. Probab.* — 1982. — Vol. 14. — P. 143–170.
2. *Петров В. В.* О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин // *Теория вероятностей и ее применения.* — 1965. — Т. 10, вып. 2. — P. 310-322.

3. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших отклонений одномерных цепей Маркова, 2. Достаціонарные распределения в экспоненциальном случае // Теория вероятностей и ее применения. — 2000. — Т. 45, вып. 3. — Р. 437–468.

UDC 519.2

On the asymptotics of large deviation probabilities for some partly or asymptotically homogeneous Markov chains

M. V. Kozlov*

** Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

The problem of fine asymptotics for the large probability deviations of Markov random walks were studied in the papers of A.A. Borovkov on the years of 1962-63 and has been afterwards intensively elaborated by himself and his disciples. My report is concerned with partly or asymptotically homogeneous Markov chains (in terms of Borovkov) in Cramer case. In the paper of A. A. Borovkov, D. A. Korshunov (2000) the fine asymptotics of large deviation probabilities for partly homogeneous ergodic Markov chain under the Cramer condition has been derived. Some further results can be found in the paper [Kozlov M.V., TVP, Vol. 58, no. 1, 2013). In a series of works of M.V. Kozlov and A.V. Shklyayev the asymptotics of large deviation probabilities for some Branching Processes in Random Environment has been developed. In my report some further possible generalisations and results on the topic are to be demonstrated.

Keywords: random walk, process of the expectation, the condition of the Cramer large deviations of the maximum, conditional limit theorem.