УДК 519.872

Исследование неоднородной двухфазной системы обслуживания с неограниченным числом приборов, класс заявок в которой определяется состоянием входящего MAP-потока

А. Н. Моисеев[*†], М. А. Шкленник[*]

[*] *Институт прикладной математики и компьютерных наук,*
Томский государственный университет,
пр. Ленина, д.36, Томск, Россия, 634050

[†] *Институт прикладной математики и телекоммуникаций,*
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198

Аннотация. В работе представлено исследование двухфазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов на фазах и входящим MAP-потоком. Продолжительность обслуживания на первой фазе и вероятность перехода на вторую фазу зависят от типа заявки, который определяется состоянием MAP-потока в момент ее поступления в систему. Исследование проводится в асимптотических условиях высокой интенсивности входящего потока. Показано, что двумерное совместное распределение вероятностей числа заявок на фазах рассматриваемой системы в указанных асимптотических условиях является гауссовским. В работе получены параметры этого гауссовского распределения.

Ключевые слова: многофазная система обслуживания, разнотипные заявки, неоднородное обслуживание, асимптотический анализ.

1. Введение

В работе исследуется система массового обслуживания (СМО) с двумя фазами, на вход которой поступает MAP-поток заявок [1]. Поступающие заявки типизируются в соответствии с состоянием, в котором находится управляющая цепь MAP в момент поступления заявки. Каждая фаза системы имеет неограниченное число обслуживающих приборов, длительность обслуживания на первой фазе и вероятность перехода заявки на вторую фазу зависят от типа заявки. Решается задача получения совместного стационарного распределения вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования. Задача решена в условиях высокой интенсивности входящего потока аналогично подходу [2].

Исследование, выполненное в работе, по смыслу близко к моделям обслуживания с разнотипными заявками [3]. Однако в настоящей работе применяется немного другой подход к представлению и исследованию моделей с разнотипными заявками, который больше напоминает моделирование систем, функционирующих в случайной среде [4]. В отличие от работ по данной тематике, представленных в научной литературе, в настоящей статье рассматриваются многофазные системы обслуживания. Кроме того, входящий поток является не простейшим, интенсивность которого меняется в случайной среде, а представляет собой более сложную модель.

2. Математическая модель

Рассматривается двухфазная СМО с входящим MAP-потоком и неограниченным числом приборов на каждой фазе. Закон, определяющий продолжительность обслуживания на первой фазе, а также вероятность перехода на вторую фазу определяются состоянием MAP-потока в момент поступления заявки. MAP задается представлением [1] $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$, где $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ – квадратные матрицы размера $L \times L$. Обозначим через $l(t) \in \{1, \ldots, L\}$ состояние управляющей цепи MAP, а через θ – вектор-строку ее стационарного распределения вероятностей.

Время обслуживания на первой фазе есть случайная величина, которая определяется одной из функций распределения $A_1(x), \ldots, A_L(x)$. Выбор функции распределения $A_l(x)$ производится по значению процесса $l(t) = l$ в момент поступления заявки и не меняется до конца обслуживания. По окончании обслуживания заявка переходит на вторую фазу с вероятностью r_l, либо покидает систему с вероятностью $1-r_l$. Обслуживание заявок на второй фазе осуществляется в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. По окончании этого обслуживания заявка покидает систему. Будем предполагать, что функции $A_1(x), \ldots, A_L(x)$ и $B(x)$ непрерывны, и существуют конечные первые моменты соответствующих распределений.

Ставится задача получения совместного распределения вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования.

3. Уравнения Колмогорова

Обозначим $i_1(t)$ и $i_2(t)$ – число заявок на первой и второй фазах системы в момент времени t. Процесс $\{i_1(t), i_2(t), l(t)\}$ не является марковским и его прямая марковизация не даст полезных результатов для решения задачи. Поэтому воспользуемся методом многомерного динамического просеивания [5], который для данной задачи можно сформулировать следующим образом. Построим два так называемых просеянных потока событий под номерами 1 и 2, которые будут соответствовать фазам исследуемой СМО. Зафиксируем некоторый момент времени T в будущем. Будем генерировать в первом потоке события, соответствующие моментам времени поступления заявок из входящего потока, которые в момент T будут находиться на обслуживании на первой фазе системы. Аналогично установим соответствие второго просеянного потока со второй фазой системы. Обозначим вероятности просеивания заявок в первый и второй потоки соответственно как $S_l(t)$

и $V_l(t)$, где t – момент поступления заявки, l – состояние MAP в этот момент времени. Вероятности $S_l(t)$ и $V_l(t)$, очевидно, зависят также от выбранного момента T, но для простоты не будем обозначать это в явном виде. В работе [6] получены выражения для $S_l(t)$ и $V_l(t)$ в случае, когда все $r_l = 1$. Для рассматриваемой же задачи эти выражения примут вид:

$$S_l(t) = 1 - A_l(T-t), \quad V_l(t) = r_l \cdot \left[A_l(T-t) - (A_l * B)(T-t)\right],$$

где $(A_l * B)(x)$ – свертка функций $A_l(x)$ и $B(x)$.

Обозначим через $n_1(t)$ и $n_2(t)$ число событий, наступивших соответственно в первом и втором просеянных потоках до момента $t < T$. Тогда, если в некоторый начальный момент времени $t_0 < T$ система была пуста, имеют места равенства [5]:

$$\mathrm{P}\left\{i_1(T) = m_1, i_2(T) = m_2\right\} = \mathrm{P}\left\{n_1(T) = m_1, n_2(T) = m_2\right\}$$

для всех $m_1, m_2 \in 0, 1, 2, \ldots$ Случайный процесс $\{l(t), n_1(t), n_2(t)\}$ является марковским. Для его распределения вероятностей $P_l(n_1, n_2, t) = \mathrm{P}\left\{l(t) = l, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2\right\}$, переходя к характеристическим функциям $H_l(u_1, u_2, t) = \sum\limits_{n_1=0}^{\infty} \sum\limits_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + ju_2 n_2} P_l(n_1, n_2, t)$ (здесь $j = \sqrt{-1}$), можно записать в векторном виде следующую систему дифференциальных уравнений с начальным условием:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left\{\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \cdot \left[(e^{ju_1} - 1)\mathbf{S}(t) + (e^{ju_2} - 1)\mathbf{V}(t)\right]\right\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, t_0) = \theta. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$, $\mathbf{S}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$ – диагональные матрицы с элементами $S_l(t)$ и $V_l(t)$ соответственно, $\mathbf{H}(u_1, u_2, t)$ – вектор-строка из элементов $H_l(u_1, u_2, t)$. Так как элементы матриц $\mathbf{S}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$ непрерывны на интервале $[t_0, T]$ в виду свойств функций $A_1(x), \ldots, A_L(x)$ и $B(x)$, то на этом интервале задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение.

4. Асимптотический анализ

Поскольку прямое решение задачи (1)–(2) не представляется возможным, будем его искать в асимптотическом условии высокой интенсивности входящего потока [2]. Для достижения этого результата MAP зададим представлением $(N\mathbf{D}_0, N\mathbf{D}_1)$, где числовой параметр $N > 0$ будет определять высокую интенсивность входящего потока. Асимптотический анализ будем проводить в условии $N \to \infty$.

В результате процедуры асимптотического анализа, построенной аналогично [2], получаем следующее решение поставленной задачи:

характеристическая функция асимптотического в условиях высокой интенсивности входящего потока стационарного совместного распределения вероятностей числа заявок на фазах рассматриваемой СМО имеет вид

$$h(u_1, u_2) = \exp\left\{ju_1Ns + ju_2Nv + \frac{(ju_1)^2}{2}Ns + \frac{(ju_2)^2}{2}Nv + \frac{(ju_1)^2}{2}Ns_2 + \frac{(ju_2)^2}{2}Nv_2 + ju_1ju_2\left[Nw_{12} + Nw_{21}\right]\right\}, \tag{3}$$

где

$$s = \theta\mathbf{D}_1\mathbf{A}\mathbf{e}, \qquad v = b\theta\mathbf{D}_1\mathbf{R}\mathbf{e},$$

$$s_2 = -2\theta\mathbf{D}_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{T} \mathbf{S}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{S}(\tau)d\tau \cdot \mathbf{e}, \quad v_2 = -2\theta\mathbf{D}_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{T} \mathbf{V}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{V}(\tau)d\tau \cdot \mathbf{e},$$

$$w_{12} = -\theta\mathbf{D}_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{T} \mathbf{S}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{V}(\tau)d\tau \cdot \mathbf{e}, \quad w_{21} = -\theta\mathbf{D}_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{T} \mathbf{V}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{S}(\tau)d\tau \cdot \mathbf{e}.$$

Здесь $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец, $\mathbf{R} = \mathrm{diag}\{r_l\}$, $b = \int\limits_0^\infty (1 - B(t))\, dt$, $\mathbf{Q} = \mathbf{G}\mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{D}_1$, $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\{a_l\}$, где $a_l = \int\limits_0^\infty (1 - A_l(t))\, dt$, а матрица $\mathbf{G}$ является решением линейного матричного уравнения $\mathbf{G}\mathbf{D} = \mathbf{e}\theta - \mathbf{I}$. Можно показать, что значения интегралов в правых частях выражений для s_2, v_2, w_{12} и w_{21} не зависят от значения T.

Таким образом искомое распределение является асимптотически гауссовским с соответствующими вектором средних и матрицей ковариации, которые могут быть получены из выражения (3).

5. Заключение

В работе показано, что стационарное совместное распределение вероятностей числа заявок в двухфазной СМО с неограниченным числом приборов на фазах и входящим MAP-потоком, в которой продолжительность обслуживания заявки на первой фазе и вероятность ее перехода на вторую фазу зависят от типа заявки, определяемого состоянием MAP-потока в момент ее поступления, в условиях высокой интенсивности входящего потока имеет вид двумерного гауссовского распределения. В работе получены параметры этого распределения.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ (Соглашение № 02.a03.21.0008).

Литература

1. *Chakravarthy S. R.* Markovian arrival processes. — Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, 2010.
2. *Moiseev A., Nazarov A.* Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process // Communications in Computer and Information Science. — 2016. — Vol. 601. — P. 323–333.
3. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing system $MAP/M/\infty$ with n types of customers // Communications in Computer and Information Science. — 2014. — Vol. 487. — P. 356–366.
4. *O'Cinneide C. A., Purdue P.* The $M/M/\infty$ queue in a random environment // Journal of Applied Probability. — 1986. — Vol. 23, no. 1. — P. 175–184.
5. *Моисеев А. Н., Назаров А. А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. — Томск: Изд-во НТЛ, 2015.
6. *Моисеев А. Н., Назаров А. А.* Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. — 2014. — Т. 50, № 2. — P. 67–76.

UDC 519.872

Heterogeneous infinite-server queueing tandem with customers' type defined by state of Markovian arrival process

A. N. Moiseev[*†], **M. A. Shklennik**[*]

[*] *Institute of Applied Mathematics and Computer Science,*
Tomsk State University,
Lenin ave. 36, Tomsk, 634050, Russia

[†] *Institute of Applied Mathematics and Communications Technology,*
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

This paper presents an investigation of an infinite-server queueing tandem with the Markovian arrival process. The service time at the first stage and the probability of customers transition to the second stage are determined by the type of the customer that corresponds to the state of the arrival process at the time when the customer arrived. A study of the system was performed under an asymptotic condition of high rate of arrivals. It is shown that under the condition, the joint stationary probability distribution of the number of customers at the stages of the tandem is two-dimensional Gaussian. Parameters of the Gaussian distribution are also obtained.

Keywords: queueing tandem, multi-type customers, heterogeneous service, asymptotic analysis.