УДК 51 (091)

Краткая история изучения распределения осколков по размерам

П. Н. Антонюк

МГТУ им. Н. Э. Баумана,
ул. 2-ая Бауманская, д. 5, стр. 1, Москва, Россия, 105005

Аннотация. Называются девять ученых, сыгравших важную роль в изучении распределения осколков.

Ключевые слова: осколки, распределение, скорость, размер, смещение, молекула.

1. Введение. Эмпирические формулы

Рассматривается задача о быстром распаде однородной и изотропной трехмерной сплошной среды на большое число осколков. Будем считать, что распад происходит практически мгновенно, то есть можно говорить о взрыве сплошной среды. Основной вопрос заключается в нахождении функции распределения осколков по размерам.

В 1933 году немецкие инженеры Пауль Отто Розин (1890–1967) и Эрих Раммлер (1901–1986) предложили эмпирическую формулу

$$F(R) = 1 - \exp[-(R/\alpha)^{\beta}]$$

для функции распределения частиц угля по размерам. Уголь использовался в различных технологических процессах. Позднее эта формула стала широко применяться для описания распределения по размерам капель жидкости, распыливаемой форсункой. На выходе из форсунки образуются осколки жидкости, которые под действием сил поверхностного натяжения очень быстро превращаются в капли. Здесь $F(R)$ — вероятность того, что капля имеет радиус, меньший R (эта вероятность пропорциональна числу молекул, образующих такие капли); α, β — положительные параметры распределения; $f(R) = F'(R)$ — плотность распределения.

В 1939 году шведский инженер Эрнст Яльмар Валодди Вейбулл (1887–1979) предложил эмпирическую формулу

$$F(m) = 1 - \exp[-(m/\mu)^{\Lambda}],$$

которая хорошо описывает распределение осколков твердого тела по массам. Здесь $F(m)$ — вероятность того, что осколок имеет массу меньшую m (эта вероятность пропорциональна числу таких осколков); μ, Λ — положительные параметры распределения; $f(m) = F'(m)$ — плотность распределения. Последняя формула широко применяется в теории прочности материалов.

Английский физик Невилл Франсис Мотт (1905–1996), лауреат Нобелевской премии по физике 1977 года, предполагал, что в формуле Вейбулла $\Lambda = 1/2$. Сегодня известно, что, в зависимости от свойств твердого тела, параметр Λ может принимать значения в некоторой окрестности $1/2$.

Математическая эквивалентность формул Розина-Раммлера и Вейбулла (формулы связаны соотношением $\beta = 3\Lambda$) указывает на универсальный характер процесса быстрого распада сплошной среды: распределение осколков по размерам не зависит от физико-химических свойств среды. Другими словами, предполагается существование универсальной функции распределения осколков по размерам, одинаково подходящей как для жидкости, так и для твердого тела. Свойство универсальности предполагает, что твердое тело есть хрупкое тело (разрушается при небольших деформациях), а жидкость есть идеальная жидкость (невязкая и несжимаемая). При мгновенном распаде идеальная жидкость ведет себя как хрупкое тело.

Вейбулл не знал о формуле Розина-Раммлера и получил похожую формулу независимо. За последние сто лет было предложено много других эмпирических формул для распределения осколков, но формулы Розина-Раммлера и Вейбулла наиболее точно подтверждаются экспериментами.

2. Распределение радиус-векторов молекул

Будем считать, что хрупкое тело состоит из одинаковых молекул, равномерно распределенных в трехмерном пространстве. После распада хрупкого тела образуются осколки произвольной формы. Сопоставим каждой молекуле радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Начало вектора совпадает с центром масс осколка, содержащего данную молекулу. Конец вектора указывает пространственное положение молекулы. Пусть функция $h(x, y, z)$ будет означать плотность распределения вероятностей для радиус-векторов молекул. Задача нахождения этой функции и задача нахождения плотности распределения вероятностей для скоростей молекул идеального газа эквивалентны. Последнюю задачу сформулировал и решил в 1859 году английский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879) [1, 2]. Вместо вектора скорости молекулы (в задаче Максвелла) рассмотрим радиус-вектор молекулы. Следуя Максвеллу, предположим, что существуют такие функции p и q, для которых

$$h(x, y, z) = p(x)p(y)p(z) = q(x^2 + y^2 + z^2).$$

Здесь второе равенство задает функциональное уравнение, решив которое найдем функцию

$$h(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\alpha)^3} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\alpha^2}\right], \tag{1}$$

где α — положительная константа. Правая часть равенства (1) определяет так называемое трехмерное нормальное распределение

3. Распределение радиус-векторов характеризуется максимальной энтропией

Математическое ожидание радиус-векторов молекул определяется нулевым радиус-вектором. Важно отметить, что если выполнены два условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y,z)dx\,dy\,dz = 1 \quad \text{(условие нормировки), и}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+y^2+z^2)h(x,y,z)dx\,dy\,dz = \mathrm{const}$$

(задана дисперсия радиус-векторов молекул или задан средний размер осколков), то функция $h(x,y,z)$ обеспечивает максимальное значение информационной энтропии Шеннона

$$H(h) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y,z)\ln h(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

тогда, и только тогда, когда выполняется равенство (1), то есть в случае нормального распределения. Последнее утверждение о максимуме энтропии для нормального распределения, впервые сформулировал (в терминах идеального газа) австрийский физик Людвиг Больцман (1844-1906) [3]. То, что Больцман называл мерой перестановочности, сегодня называется энтропией Шеннона. Максимальность энтропии является важнейшим основанием для представления распределения радиус-векторов в виде нормального распределения

4. Распределение смещений молекул

Модуль радиус-вектора молекулы назовем смещением молекулы и обозначим буквой R. Очевидно, что $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Пусть функция $g(R)$ характеризует вероятность сопоставления произвольной молекуле смещения R. Распределение молекул по смещениям эквивалентно распределению молекул идеального газа по модулям скорости в задаче Максвелла. Таким образом, получаем плотность распределения вероятностей смещений молекул

$$g(R) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} R^2 e^{-R^2/\alpha^2}. \tag{2}$$

Заметим, что в задаче о распределении смещений молекул все осколки имеют произвольную, часто достаточно сложную, форму. При этом взаимное расположение большого числа молекул характеризуется симметричным распределением их смещений.

5. Преобразование распределения смещений молекул в распределение размеров осколков

Предположим теперь для простоты, что все осколки имеют форму шара, как в случае распада жидкости на капли. Пусть буква R одновременно обозначает смещение молекулы и радиус шарового осколка. Пусть плотность распределения вероятностей радиусов осколков задается функцией $f(R)$. Вероятность того, что радиус осколка лежит между R и $R+dR$ пропорциональна числу молекул, образующих такие осколки. Установим связь смещений молекул, определяемых функцией $g(R)$, с радиусами осколков, определяемых функцией $f(R)$. Из геометрических соображений вытекает интегральное соотношение

$$\int_0^{R_0} g(R)dR = \int_0^{R_0} f(R)dR + \int_{R_0}^{+\infty} f(R)\frac{R_0^3}{R^3}dR,$$

связывающее функции $g(R)$ и $f(R)$ для любого неотрицательного значения R_0. Перепишем соотношение в виде

$$\int_0^{R_0} g(R)dR = \int_0^{R_0} f(R)dR + R_0^3\int_0^{+\infty} \frac{f(R)}{R^3}dR - R_0^3\int_0^{R_0} \frac{f(R)}{R^3}dR.$$

Дифференцируя последнее выражение дважды по R_0, получаем два равенства

$$g(R_0) = 3R_0^2\int_0^{+\infty} \frac{f(R)}{R^3}dR - 3R_0^2\int_0^{R_0} \frac{f(R)}{R^3}dR,$$

$$g'(R_0) = 6R_0\int_0^{+\infty} \frac{f(R)}{R^3}dR - 6R_0\int_0^{R_0} \frac{f(R)}{R^3}dR - \frac{3f(R_0)}{R_0}.$$

Исключая интегралы из этих равенств, находим формулу преобразования функции $g(R)$ в функцию $f(R)$:

$$f(R) = \frac{1}{3}[2g(R) - g'(R)\cdot R]. \tag{3}$$

Согласно этой формуле,

$$\int_0^{\infty} g(R)dR = \int_0^{\infty} f(R)dR,$$

то есть $\int_0^\infty g(R)dR = 1$ тогда, и только тогда, когда $\int_0^\infty f(R)dR = 1$. Формулы (2) и (3) сразу дают плотность распределения вероятностей радиусов осколков:

$$f(R) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}\alpha^5} R^4 e^{-R^2/\alpha^2}. \tag{4}$$

Это — плотность хи-распределения с пятью степенями свободы. Среднее значение радиуса осколка (математическое ожидание радиуса) равно $8\alpha/(3\sqrt{\pi})$, а мода радиуса осколка (точка максимума плотности распределения) равна $\sqrt{2}\alpha$. Следовательно, среднее значение радиуса больше моды радиуса.

6. Совпадение теории и эксперимента

Перепишем функцию плотности $f(R)$ в координатах "абсцисса — масса осколков, ордината — число осколков", тогда получим $f(m)$, и рассмотрим функцию распределения:

$$F(m) = 1 - \exp[-(m/\mu)^\Lambda], \qquad \Lambda = 2/3. \tag{5}$$

Функция $F(m)$, полученная теоретически, в точности совпадает с распределением Вейбулла, полученным из многочисленных экспериментов! Более того, значение $\Lambda = 2/3$, полученное в предположении хрупкости твердого тела, согласуется с экспериментальными значениями для хрупких тел: $0,6 \le \Lambda \le 0,7$.

7. Заключение

Формулы (1)–(5) описывают осколки хрупкого тела. Формулы (3)–(4) найдены автором в 2007 году. Английский физик Джон Уильям Стретт (лорд Рэлей) (1842–1919), лауреат Нобелевской премии по физике 1904 года, изучая произвольное распределение фаз в рамках теории колебаний, вывел формулу для амплитуд колебаний, математически совпадающую с формулой (2), и это совпадение не случайно. Французские физики Жан Батист Перрен (1870–1942), лауреат Нобелевской премии по физике 1926 года, и Поль Ланжевен (1872–1946), изучая броуновское движение, применили математический аппарат Максвелла к анализу смещений броуновской частицы. Это позволило Перрену в 1908–1909 гг. найти точное значение числа Авогадро и окончательно доказать атомно-молекулярную теорию строения вещества. Таким образом, скорость молекулы газа, амплитуда колебания, смещение броуновской частицы и смещение молекулы осколка описываются одной и той же формулой (2).

Литература

1. *Максвелл Дж. К.* Пояснения к динамической теории газов // Основатели кинетической теории материи. Л. Кар, Д. Бернулли, М.В. Ломоносов, Д.П. Джоуль, Р. Клаузиус, Дж. К. Максвелл. Сб. ст. / Под ред. А.К. Тимирязева. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. — С. 185–220.
2. *Максвелл Дж. К.* Труды по кинетической теории. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 406 с.
3. *Больцман Л.* Избранные труды. Молекулярно-кинетическая теория газов. Термодинамика. Статистическая механика. Теория излучения. Общие вопросы физики. — М.: Наука, 1984. — 590 с.
4. *Антонюк П. Н.* Распределение по размерам капель распыливаемой жидкости // Сб. научн. трудов по материалам Международной конф. Двигатель-2007. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. — С. 135–139.
5. *Антонюк П. Н.* Страницы истории фракталов // Историко-математические исследования. Вторая серия. — М.: Янус-К, 2014. — Вып. 15 (50). — С. 196–212.

UDC 51 (091)

A brief history of the study of the fragment size distribution

P. N. Antonyuk

Bauman Moscow State Technical University,
2-ya Baumanskaya st., 5, b. 1, Moscow, 105005, Russia

Nine scientists are recalled which have played an important role in studying the distribution of fragments.

Keywords: fragments, distribution, speed, size, displacement, molecule.