УДК 519.2

Модифицированная модель Крамера-Лундберга с релейным управлением и произвольными объемами потребления ресурса

А. А. Назаров[*†], **В. И. Бронер**[*†]

[*] *Томский государственный университет,*
пр. Ленина, 36, Томск, Россия, 634050

[†] *Российский университет дружбы народов,*
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198

Аннотация. В данной работе рассматривается математическая модель системы управления запасами в виде модифицированной модели Крамера-Лундберга с релейным управлением и произвольным распределением объемов потребления. Найдено точное выражение для стационарного распределения вероятностей значений процесса уровня запасов, накопленных в системе.

Ключевые слова: модель Крамера-Лундберга, управление запасами, релейное управление, преобразование Фурье.

1. Введение

Существуют различные классификации моделей управления запасами. В соответствии с классификацией по исследуемым периодам различают одноопериодные и многопериодные модели. Newsvendor problem (модель разносчика газет) одна из классических однопериодных моделей теории управления запасами [1–4, 8, 9].

Обобщением однопериодных моделей являются многопериодные, являющиеся более сложными, поскольку в многопериодных моделях предполагается использование оставшихся в конце предыдущего периода запасов [5, 10]. Многопериодные модели управления запасами с релейным управлением рассмотрены в [6, 7].

В данной работе строится и исследуется модифицированная модель Крамера-Лундберга с релейным управлением и произвольным распределением объемов потребления, которая имеет широкое применение в теории управления запасами, экономике, страховании и других областях.

2. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель управления запасами (Рис. 1).

Обозначим объем накопленных ресурсов в системе к моменту времени t через $s(t)$. На вход системы с непрерывной постоянной скоростью ν в единицу времени поступают некоторые ресурсы. Запросы на

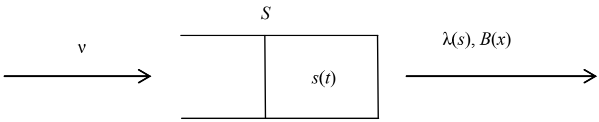

Рис. 1. Система управления запасами

потребление ресурса поступают в систему в случайные моменты времени. Моменты поступления запросов на потребление ресурса образуют пуассоновский поток с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, которая зависит от значений $s(t) = s$ величин запасов, накопленных к моменту времени t поступления заявки на потребление ресурса

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, & s < S, \\ \lambda_2, & s \geq S, \end{cases}$$

здесь S – некоторое пороговое значение ресурса, при превышении которого происходит смена интенсивности пуассоновского потока. Будем считать, что величины запросов на потребление – независимые, одинаково распределенные случайные величины, имеющие произвольную функцию распределения $B(x)$.

Будем полагать, что процесс $s(t)$ может принимать отрицательные значения, интерпретируя это как отложенное исполнение запроса на потребление, то есть если для исполнения заявки на потребление недостаточно ресурса, то заявка ожидает накопления требуемого объема ресурса.

Условие существование стационарного режима имеет вид

$$\lambda_1 b < \nu < \lambda_2 b,$$

где b - первый момент функции $B(x)$. Таким образом, если условия $\lambda_1 < \nu/b < \lambda_2$ и $s < S$ выполняются, то ресурс накапливается в системе, в противном случае при $s \geq S$ объем ресурса в системе будет уменьшаться, поскольку интенсивность потребления увеличится.

3. Постановка задачи

Исходя из определения процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством состояний $-\infty < s < \infty$.

Обозначим плотность распределения вероятностей значений процесса $s(t)$

$$P(s,t) = \frac{\partial P\left\{s(t) < s\right\}}{\partial s},$$

и запишем следующее равенство

$$P(s+\nu\Delta t, t+\Delta t) = P(s,t)(1-\lambda(s)\Delta t)+$$

$$+\Delta t \int\limits_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x,t)dB(x) + o(\Delta t),$$

тогда имеет место следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} + \nu\frac{\partial P(s,t)}{\partial s} = -\lambda(s)P(s,t) + \int\limits_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x,t)dB(x).$$

Рассматривая функционирование системы в стационарном режиме и обозначая стационарную плотность распределения $P(s)$ вероятностей значений уровня запасов накопленных в системе, полагая $\nu = 1$, предыдущее уравнение перепишем в виде

$$P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int\limits_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x)dB(x), \tag{1}$$

где $P(s)$ удовлетворяет граничным условиям $P(-\infty) = P(\infty) = 0$. Будем полагать, что решение уравнения (1) существует и единственно. Ставится задача нахождения вида функции $P(s)$.

4. Решение $P(s)$ уравнения (1)

Введем обозначения

$$\int\limits_{-\infty}^S P(s)ds = R_1, \quad \int\limits_S^\infty P(s)ds = R_2.$$

Сформулируем утверждение о вероятностях R_1 и R_2.

Утверждение 1 *Вероятности R_1 и R_2 имеют вид*

$$R_1 = \frac{\lambda_2 b - 1}{\lambda_2 b - \lambda_1 b}, \quad R_2 = \frac{1-\lambda_1 b}{\lambda_2 b - \lambda_1 b}.$$

Сформулируем теорему о решении $P(s)$ уравнения (1).

Теорема 1 *Решение $P(s)$ уравнения (1) имеет вид*

$$P(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-jus} P_1^*(u) du, & s \leq S, \\ Ce^{-\gamma(s-S)}, & s > S, \end{cases}$$

где γ - единственный положительный корень уравнения $\lambda_2 - \gamma = \lambda_2 \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x)$, $j = \sqrt{-1}$. $P_1^*(u)$ – преобразование Фурье функции

$$P_1(s) = \begin{cases} P(s), & s \leq S, \\ 0, & s > S, \end{cases}$$

определяемое выражением $P_1^*(u) = \frac{\lambda_2 \left\{ 1 - \int\limits_0^{\infty} e^{jux} dB(x) \right\} - ju}{\lambda_1 \left\{ 1 - \int\limits_0^{\infty} e^{jux} dB(x) \right\} - ju} \frac{C}{ju - \gamma} e^{juS}$, *константа C определяется равенством*

$$C = \gamma R_2.$$

Сформулированная теорема определяет стационарное распределение вероятностей значений процесса $s(t)$.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ (Соглашение No. 02.a03.21.0008 от 24 июня 2016 г.).

Литература

1. *Kitaeva A., Subbotina V., Zmeev O.* The Newsvendor Problem with Fast Moving Items and a Compound Poisson Price Dependent Demand // 15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2015 / Elsevier (IFAC-PapersOnLine). — 2015. — No. 48. — P. 1375–1379.
2. *Kitaeva A., Subbotina V., Stepanova N.* Estimating the Compound Poisson Demand's Parameters for Single Period Problem for Large Lot Size // 15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2015 / Elsevier (IFAC-PapersOnLine). — 2015. — No. 48. — P. 1357–1361.
3. *Choi T.-M.* Handbook of Newsvendor Problems: Models, Extensions and Applications / Choi Tsan-Ming (ed.). — Springer, 2012.

4. *Khouja M.* The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestionsfor future research // OMEGA-INT J. — 1999. — Vol. 27, no. 5. — P. 537–553.
5. *Mousavia S. M., Hajipoura V., Niakib S. T. A., Alikar N.* Optimizing multi-item multi-period inventory control system with discounted cash flow and inflation: Two calibrated meta-heuristic algorithms // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 37, no. 4. — P. 2241–2256.
6. *Nazarov A., Broner V.* Inventory Management System with Erlang Distribution of Batch Sizes // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science. — Springer, 2012. — Vol. 678. — P. 273–280.
7. *Nazarov A.A., Broner V.I.* Resource Control for Physical Experiments in the Cramer-Lundberg Model // Russian Physics Journal. — 2016. — Vol. 59, no. 7. — P. 1024–1036.
8. *Silver E. A.* Inventory Management and Production Planning and Scheduling // Silver E. A., Pyke D. F., Peterson R. — Wiley, New York, 1998.
9. *Qin Y., Wang R., Vakharia A., Chen Y., Hanna-Seref M.* The newsvendor problem: review and directions for future research // European Journal of Operational Research. — 2011. — Vol. 213. — P. 361–374.
10. *Zhang D., Xu H., Wu Y.* Single and multi-period optimal inventory control models with risk-averse constraints // European Journal of Operational Research. — 2009. — Vol. 199. — P. 420–434.

UDC 519.2

Modified Kramer-Lundberg model with On/Off control and arbitrary distribution of demand purchases values

A. A. Nazarov[*†], V. I. Broner[*†]

[*] *Tomsk State University,*
36 Lenina ave., Tomsk, 634050, Russia
[†] *RUDN University,*
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

In this paper, we consider the modified Cramer-Lundberg model of inventory management system with On/Off control and arbitrary distribution of demand purchases values. Exact expression for the steady-state probability distribution of the inventory level accumulated in the system is obtained.

Keywords: modified Kramer-Lundberg model, inventory management, On/Off control, Fourier transform.