УДК 519.217; 519.214.8

Локальный принцип больших уклонений для неоднородных марковских процессов

Н. Д. Введенская[2], А. В. Логачёв[1], Ю. М. Сухов[2], А. А. Ямбарцев[‡]

[2] *Добрушинская лаборатория ИППИ РАН, Большой Каретный, 19, Москва, Россия, 127051*
[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева, пр. ак. Каптюга, 4, Новосибирск, Россия. 630090,*
[‡] *Department of Statistics, Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, Rua do Matão 1010, CEP 05508–090, São Paulo SP, Brazil.*

Аннотация. В работе рассматривается марковский процесс с непрерывным временем, в котором интенсивность скачков имеет асимптотически степенную зависимость от положения процесса. Получена экспоненциальная асимптотика вероятностей экскурсий нормированного процесса, протекающих в окрестности заданной неотрицательной непрерывной функции.

Ключевые слова: Марковские процессы, большие уклонения, локальная задача.

1. Постановка задачи. Основная теорема.

В современной литературе, посвященной принципу больших уклонений, рассматриваются различные условия, которые накладываются на случайные процессы, для получения экспоненциальной асимптотики вероятностей маловероятных событий (см., например, [1].

Мы будем рассматривать скачкообразные марковские процессы неоднородные по фазовому пространству, интенсивности скачков которых полиномиально зависят от положения процесса. При этом удается получить экспоненциальную асимптотику для вероятностей находиться в окрестности непрерывной функции как для эргодических процессов такого типа так и для невозвратных, в том числе допускающих "взрывы".

Изучение таких марковских процессов представляет несомненный математический интерес и, кроме того, важно для многих приложений. Например, в теории информации (кодирование и хранение информации), биологии и химии (модели роста и вымирания системы со многими компонентами), экономике (модели конкурентоспособного производства и ценообразования).

Мы рассмотрим марковский случайный процесс с непрерывным временем $\xi(t), t \geq 0$ и с фазовым пространством $\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$, который стартует из 0.

Изменение процесса $\xi(\,\cdot\,)$ опишем следующим образом. Пусть $\xi(t) = x \in \mathbb{Z}^+$. Положение случайного процесса не изменяется на протяжении случайного времени τ_x, которое имеет экспоненциальное распределение с параметром $h(x) > 0$.

В момент времени $t + \tau_x$ случайный процесс переходит в состояния $x \pm 1$ с вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi(t+\tau_x) = x+1) = \frac{\lambda(x)}{h(x)}, \quad \mathbf{P}(\xi(t+\tau_x) = x-1) = \frac{\mu(x)}{h(x)} \qquad (1)$$

соответственно, где $\lambda(x) + \mu(x) = h(x)$, $\lambda(x) > 0$ при $x \in \mathbb{Z}^+$, $\mu(x) > 0$ при $x \in \mathbb{N}$.

Будем предполагать, что при $x = 0$ справедливы равенства $\mu(x) = 0$, $\lambda(x) = \lambda_0 > 0$ (не можем покинуть множество $\mathbb{Z}^+$), а также, что выполнены асимптотические условия

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lambda(x)}{P_l x^l} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mu(x)}{Q_m x^m} = 1, \qquad (2)$$

где P_l и Q_m – положительные константы, $l \geq 0$, $m \geq 0$, $\max(l, m) > 0$.

Существование марковского процесса с перечисленными свойствами для случаев, когда $l \leq 1$ устанавливается стандартным способом, см. например, [2], гл. 17, §4, 5.

При $l > 1$ процесс $\xi(\cdot)$, вообще говоря, может уйти на бесконечность ("взорваться") за случайное время, которое с вероятностью 1 конечно. Есть два подхода построения таких процессов: 1) обрыв процесса в случайный момент времени (момент взрыва), 2) расширение фазового пространства $\mathbb{Z}^+$ добавлением поглощающего состояния ∞.

Имеющиеся результаты позволяют выписать условия на l и m, достаточные как для ухода, так и для не ухода на бесконечность. Например, при $l > 1$ и $m < l$ процесс $\xi(\,\cdot\,)$ уйдет на бесконечность за конечное случайное время, а при $m > l$ не уйдет на бесконечность за конечное время.

Нас интересует локальный принцип больших уклонений (ЛПБУ) для последовательности случайных процессов

$$\xi_T(t) = \tfrac{\xi(tT)}{T},\ 0 \leq t \leq 1,$$

где $T > 0$ – параметр, который неограниченно возрастает (см. например, [3].

Справедливость наших результатов не зависят от того, уходит или нет процесс $\xi(\cdot)$ на бесконечность за конечное время. Мы изучаем асимптотику вероятностей траектории процесса $\xi_T(\cdot)$ находиться в окрестности непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции. Т.е. мы работаем на множестве тех траекторий, на которых исходный процесс не уходит на бесконечность на отрезке $[0, T]$. Рассматриваемые вероятности положительны даже если процесс $\xi(\cdot)$ "взрывается"за конечное время (см. ниже выражение (3)).

Рассмотрим пространство $\mathbb{D}[0,1]$ непрерывных справа и имеющих пределы слева функций. Для $f,g\in\mathbb{D}[0,1]$ положим

$$\rho(f,g)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|. \tag{3}$$

Определение. *Последовательность случайных процессов $\xi_T(\,\cdot\,)$ удовлетворяет ЛПБУ на множестве $G\subset\mathbb{D}[0,1]$ с функционалом уклонений $I=I(f)\,:\,\mathbb{D}[0,1]\to[0,\infty)$ и нормирующей функцией $\psi(T)\,:\,\lim\limits_{n\to\infty}\psi(T)=\infty$, если для любой функции $f\in G$ выполнено равенство*

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0}\limsup\nolimits_{T\to\infty}\tfrac{1}{\psi(T)}\ln\mathbf{P}(\xi_T(\,\cdot\,)\in U_\varepsilon(f))$$
$$=\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0}\liminf\nolimits_{T\to\infty}\tfrac{1}{\psi(T)}\ln\mathbf{P}(\xi_T(\,\cdot\,)\in U_\varepsilon(f))=-I(f),\ \textit{где}$$
$$U_\varepsilon(f)=\{g\in\mathbb{D}[0,1]:\ \rho(f,g)<\varepsilon\}.$$

В рамках данного Определения возможны разные случаи. Ниже мы рассматриваем три случая для вида функционала уклонений в зависимости от того какое из следующих трех условий выполнено 1) $l>m$; 2) $l=m$; 3) $l<m$.

Заметим, что случай $m=1$, $l=0$ следует из работы [4] (там рассмотрен двухмерный марковский процесс). Классический случай $l=m=0$ следует, например, из работы [5]. Мы пользуемся подходом работы [4].

Обозначим через F множество функций из $C^1[0,1]$, таких что $f(0)=0,\ f(s)>0$ при $0<s\le 1$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2). *Тогда последовательность случайных процессов $\xi_T(t)$ удовлетворяет следующему ЛПБУ на множестве F.*

a) Если $l>m$, то нормирующая функция $\psi(T)=T^{l+1}$ и функционал уклонений имеет вид

$$I(f)=P_l\int_0^1 f^l(t)dt,\quad f\in F.$$

b) Если $l=m$ и $P_l\neq Q_m$, то $\psi(T)=T^{l+1}$ и функционал уклонений имеет вид

$$(f)=(\sqrt{P_l}-\sqrt{Q_m})^2\int_0^1 f^l(t)dt,\quad f\in F.$$

c) Если $l<m$, то нормирующая функция $\psi(T)=T^{m+1}$ и функционал уклонений имеет вид

$$I(f)=Q_m\int_0^1 f^m(t)dt,\quad f\in F.$$

Случай $l=m$, $P_l=Q_m$ требует другой нормировки и здесь нами не рассматривается.

Изучении асимптотического поведения логарифма вероятности $\mathbf{P}(\xi_T(\cdot)\in U_\varepsilon(f))$ для функций $f\in F$ опирается на приведенную ниже Лемму.

Рассмотрим однородный и по пространству и по времени марковский процесс $\zeta(t)$, $t \in [0,T]$, с фазовым пространством $\mathbb{Z}$, интенсивностью скачков равной 1, размером скачков равным ± 1, каждый с вероятностью $1/2$.

Обозначим через X_T множество всех непрерывных справа кусочно-постоянных функций с конечным числом скачков размера ± 1 на интервале $[0,T]$.

Лемма. *Распределение случайного процесса $\xi(\cdot)$ на X_T абсолютно непрерывно относительно распределения процесса $\zeta(\cdot)$ и соответствующая плотность $\mathbf{p} = \mathbf{p}_T$ (плотность Радона-Никодима) на X_T имеет вид*

$$\mathbf{p}(u) = \begin{cases} 2^{N_T(u)} \left(\prod\limits_{i=1}^{N_T(u)} e^{-[h(u(t_{i-1})))-1]\tau_i} \nu(u(t_{i-1}), u(t_i)) \right) & \\ \qquad \times e^{-[h(u(t_{N_T(u)}))-1)][T-t_{N_T(u)}]}, & \text{если } N_T(u) \geq 1, \\ e^{-[h(0)-1]T}, & \text{если } N_T(u) = 0. \end{cases}$$

Здесь функция u имеет $N_T(u)$ скачков в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_{N_T(u)}$ таких что $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N_T(u)} < T < t_{N_T(u)+1}$. Далее, $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, и

$$\nu(u(t_{i-1}), u(t_i)) = \begin{cases} \lambda(u(t_{i-1})), & \text{если } u(t_i) - u(t_{i-1}) = 1; \\ \mu(u(t_{i-1})), & \text{если } u(t_i) - u(t_{i-1}) = -1. \end{cases}$$

В утверждении Леммы учитывается, что $\mathbf{P}(\xi(\cdot) \subset X_T)$ может быть меньше 1. Заметим, что похожая плотность использовалась в работе [4].

Утверждение Леммы эквивалентно тому, что для любого измеримого множества $G \subseteq X_T$

$$\mathbf{P}(\xi(\cdot) \in G) = e^T \mathbf{E}(e^{-A_T(\zeta)} e^{B_T(\zeta) + N_T(\zeta)\ln 2}; \zeta(\cdot) \in G)$$

$$A_T(\zeta) = \sum_{i=1}^{N_T(\zeta)} h(\zeta(t_{i-1}))\tau_i + h(u(t_{N_T(u)}))[T - t_{N_T(u)}] = \int_0^T h(\zeta(t))dt,$$

$$B_T(\zeta) = \sum_{i=1}^{N_T(\zeta)} \ln(\nu(\zeta(t_{i-1}), \zeta(t_i))).$$

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.А. Боровкову, Б.М. Гуревичу, А.М. Могульскому и Е.А. Печерскому за интерес к работе и полезные замечания. Исследование Н.Д. Введенской выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №. 14-50-00150).

Литература

1. *Dembo A., Zeitoun O.* Large Deviations Techniques and Applications. – Springer, NY, 1998.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 2-е изд. — М.: Мир, 1966.
3. *Боровков А.А., Могульский А.А.* О принципах больших уклонений в метрических пространствах // Сиб. мат. ж. — 2010. — Т. 51, вып. 6. — С. 1251–1269.
4. *Mogulsky A., Pechersky E. , Yambartsev A.* Large deviations for excursions of non-homogeneous Markov processes // Electronic Commun. Probab. — 2014. — V. 19. — P. 1–8.
5. *Боровков А.А., Могульский А.А.*. Неравенства и принципы больших уклонений для траекторий процессов с независимыми приращениями // Сиб. мат. ж. — 2013. — Т. 54, вып. 2. — С. 286–297.

UDC 519.217; 519.214.8

Local large deviation principle for inhomogeneous Markov processes

N. D. Vvedenskaya[2], **A. V. Logachev**[1], **Yu. M. Suhov**[2], **A. A. Yambartsev**[‡]

[2] *Institute for information transmition problems RAS, Bolshoy Karetny per. 19, build.1, Moscow 127051 Russia*

[1] *Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 4 Acad. Koptyug avenue, 630090, Novosibirsk, Russia*

[‡] *Department of Statistics, Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, Rua do Matão 1010, CEP 05508–090, São Paulo SP, Brazil*

Consider a continuous-time Markov BDP $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ with a state space $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \ldots\}$. Given that $\xi(t) = x \in \mathbb{Z}^+$, the state x remains unchanged during an exponential random time τ_x of rate $h(x) := \lambda(x) + \mu(x)\mathbf{1}(x \geq 1)$; afterwards. We investigate the probability of excursions in a neighborhood of curve.

Keywords: Markov processes, large deviations, local problem.