УДК 51(091)

Импликация в работах логиков первой половины XX столетия

З. А. Кузичева*

* *Кабинет истории и методологии математики и механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломносова, Ленинские горы, Москва, Россия, 119991*

Аннотация. В докладе будет рассмотрен подход к импликации принятый среди логиков школы Д. Гильберта (Г. Вейля, П. Бернайса, В. Аккермана, А. Шмидта и др.) в сравнении с результатами предыдущего поколения авторов таких, как И. Льюис, А. Эллис, Мак-Колл и А. Де Морган. Также докладчик собирается сравнить подход к импликации В. Аккермана с подходом С.А. Яновской, который она сформулировала на лекциях по математической логике на философском факультете МГУ в 50-е годы XX века.

Ключевые слова: строгая импликация, сильная импликация, следствие, модальность, необходимость, возможность.

1. Введение

Первой формой математической логики явилась алгебра логики (алгебра классов, логика Буля), сформировавшаяся сначала в сочинениях Буля и Де Моргана, затем уточненная их последователями. К концу XIX в. булева алгебра приобрела известный теперь облик: понятия в ней трактуются с точки зрения их объемов, которые часто называют классами; предполагается наличие универсального и пустого классов, обычно обозначаемые соответственно 1 и 0. Прочие классы - подклассы универсума, обозначаются буквами некоторого алфавита. Вводятся операции $+$ (сложение, или объединение),$\times$ или $\cdot$ (умножение, или пересечение, этот знак, как правило, опускается) и $^{-}$, дополнение (до универсума). В некотором смысле была решена давняя мечта исследователей усилить традиционную логику, дополнив ее математическими методами. Но возникли новые трудности. В докладе предполагается проследить, как преодолевались некоторые из таких затруднений.

2. Основная часть

Представители традиционной логики увидели в новой системе лишь некую алгебру. В явном виде в ней не шло речи о выводе следствий из посылок – главной задаче логики. Однако эта алгебра помимо уже упомянутого теоретико-множественного истолкования, допускает и логическое. Классы можно трактовать как высказывания, если понимать $+$ как "или", $\times$ как "и" и $^{-}$ как отрицание. Здесь возникает затруднение:

в логике существенное значение имеет импликация, представляющая выражение "Если ..., то ...", аналога которому в нашей алгебре как будто нет.

Одна из интересных попыток преодолеть это затруднение принадлежит Мак-Коллу. На множестве утверждений (statemens) он вводит операции конъюнкции (символ операции опускается), дизъюнкции $(+)$, отрицания ($'$), истинному утверждению сопоставляется 1, ложному 0. Кроме того, он определяет импликацию, обозначая ее двоеточием, например, $a : b$, означает a влечет (имплицирует) b; a - антецедент (посылка), b - консеквент (заключение). Таким образом, Мак-Колл строит вариант исчисления высказываний, правда, не вполне формализованный. [1]

Основное условие, налагаемое на импликацию Мак-Коллом таково: Если a истинно, то b должно быть истинно. Это очень важное условие. Из него сразу же следует, что $a : b$ равносильно (эквивалентно)тому, что $a = ab$, причем эквивалентность утверждений a и b истолковывается как $(a : b)(b : a)$ [2]. Если символы a, b,... понимать как классы, то оказывается, что Мак-Колл предложил выражение импликации в символах включения класса a в класс b. Тем самым был указан способ истолкования булевой алгебры в терминах традиционной логики. В 1905 г. французский логик Л. Кутюра в сравнительно небольшом сочинении [3] дал строгое обоснование этих двух способов истолкования алгебры Буля: а) в форме алгебры классов, б) как исчисление предложений.

Обратимся к школе Гильберта. Будем обозначать материальную импликацию знаком $\supset$.

Формализация процесса логического вывода, прежде всего, состоит в построении исчисления высказываний и исчисления предикатов [4]. В естественных языках выражения типа "Если ..., то ..." предполагает смысловую связь между посылкой и заключением, часто подразумевается причинно-следственная связь между ними. Истинностное значение высказывания $a \supset b$ зависит только от того, какие из значений 1 и 0 приписаны буквам a и b. Высказывание $a \supset b$ истинно, если a ложно или же b истинно, т.е. принимают значения 0 и 1 соответственно. Но если a истинно, а b - ложно, импликация $a \supset b$ ложна. Иными словами, при истинности заключения импликация истинна, независимо от того, истинна или ложна посылка, что иначе выражают словами "истина следует из всего, что угодно". Далее, импликация оказывается истинной при любом заключении, если посылка импликации ложна (принимает значение 0), говорят, - "из лжи следует, все, что угодно".

[1] Строго аксиоматическое построение исчисления высказываний осуществил Г.Фреге [1]. Однако этот результат оставался незамеченным, пока на него не обратил внимание Д. Гильберт, по достоинству оценивший значение указанного сочинения Фреге. Общеизвестной стала аксиоматизация исчисления высказываний (и предикатов), предложена Б. Расселом и Уайтхедом. Кстати, термин "материальная импликация" введен Б. Расселом.

Аналогично тому, как в "Основаниях геометрии" Гильберт разбивает систему постулатов на несколько групп, так он и среди аксиом логики высказываний выделяет 5 групп, нумеруя их римскими цифрами. В группе I, названной "Формулы для импликации" формулы:

$$A \supset (B \supset A); (A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B); (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)).$$

Как видим, в этой группе формулы не содержат никаких логических связок кроме импликации. Следующие группы состоят из формул для конъюнкции, для дизъюнкции, для эквивалентности и для отрицания. В формулы каждой группы входит только импликация и та связка, которую вводит эта группа. Последнюю группу составляют формулы для отрицания. В формулы групп I - IV не входит знак отрицания, эти формулы составляют логику, названную позитивной. Не имея возможности подробно остановиться на описании позитивной логики, отметим лишь, что особую роль здесь играют специальные импликативные формулы [4]. Подробно исследованием свойств импликации занимался также П. Бернайс: Приложение III, [5].

Исследованием логических систем и в частности свойствами импликации посвящено несколько работ К.И. Льюиса. Проблемам, связанным с затруднениями, вызванными "неудобными" свойствами материальной импликацией он посвятил статью [6], а в следующем году вышла его работа [7], в ней он предложил исчисление, где вместо материальной импликации определяется так называемая строгая (strickt) импликация, для которой не должны иметь место упомянутые выше "парадоксы" материальной импликации. Уточнение проблем, связанных со строгой импликацией рассматривается в монографии [8]. Высказывания здесь обозначаются малыми латинскими буквами: $p, q, r, \ldots$. Обычным образом вводится операция логического произведения (конъюнкции) pq или $p \cdot q$, отмечается, что дизъюнкцию можно ввести через конъюнкцию и отрицание:

$$p \vee q. = . \backsim (\backsim p \backsim q).$$

Кроме того определяется оператор возможности $\Diamond p$: «p – возможно», или «возможно, что p истинно».

Строгая импликация определяется Льюисом следующим образом:

$$p \prec q. = . \backsim \Diamond (p \backsim q),$$

Ложно, что p оказалось истинно, а q ложно, или утверждение, что p истинно, а q ложно противоречиво (не-самосовместно).

Эквивалентность «=» определяется как конъюнкция (строгих) импликаций:

$$(p \prec q)(q \prec p).$$

Льюис полагал, что строгая импликация теснее связана с обычными способами употребления выражений вида “Если ..., то ...”, чем материальная импликация.

Теперь обратимся к импликации В.Аккермана. В 1956 г. в журнале "Symbolic Logic" опубликована статья В. Аккермана [9]. В ней излагается исчисление, в котором используется импликация, названная strenger Implikation.

Во введении Аккерман указывает причину, побудившую его ввести свою импликацию: "Сильная импликация, которую мы обозначим посредством $A \to B$, призвана выразить, что между A и B имеется логическая связь, что содержание B является частью содержания A". Он считает необходимым исключить некоторые формулы, тождественно истинные в классической логике высказываний, в их числе: $A \to (B \to A)$, $A \to (A \& B)$, $A \to (\overline{A} \to B)$. Аккерман отмечает, что отличие его импликации от импликации Льюиса состоит в отказе от формулы $B \to (A \to A)$, равно как и отказе от тождественной истинности формулы $(A \& \overline{A}) \to B$, так как из-за наличия высказывания, которое следует из любого высказывания или из которого следует любое высказывание, становится неоправданным понятие импликации, как логической взаимосвязи двух высказываний. Аккерман отмечает различие и в построении его исчисления и исчисления Льюиса: последний определяет строгую импликацию через модальный оператор "возможно"(см. выше), в то время, как в его системе модальность определяется на основании сильной импликации.

В октябре того же года С.А. Яновская начала чтение курса лекций "Исчисление сильной импликации В. Аккермана" на философском факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. На русский язык перевести strenger Implikation следовало бы как "строгая импликация". Но в нашей литературе уже стал привычным такой термин применительно к импликации К.И. Льюиса, поэтому С.А. Яновская предложила термин Аккермана перевести как "сильная импликация". В данном тексте будет использован предложенный С.А. перевод. Она не просто излагает статью Аккермана, но проводит глубокий анализ его исчисления. В результате выявляются проблемы, которые требуют дальнейшего исследования системы Аккермана.

Как показало время, работа Аккермана послужила отправной точкой возникновения новой неклассической логики, получившей название релевантной.

3. Заключение

В заключение хотелось бы отметить, что хотя исчисление высказываний является одной из самых "слабых" формальных систем, даже из такого краткого обзора видно, как много интересных фактов, касающихся этой системы, выясняется при внимательном ее изучении.

Литература

1. *Frege G.* Begriffsschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. — Halle, 1879.
2. *MacColl H.* Symbolic Reasoning. — Mind. 5, 1880. — P. 40–60.
3. *Couturat L.* L'alg'ebre de la logique. — Paris, 1905.
4. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т. 1. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1979.
5. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т.2. Теория доказательств. — М.: Наука, 1982.
6. *Lewis C. J.* The issues concerning material implication // Journal of philos. psychology and scientific method. — 1917. — Vol.14. — P. 350 – 356.
7. *Lewis C. J.* A survey of symbolic logic. — Berkeley (Univ. Calif. Press.), 1918.
8. *Lewis C. J., Langford C. H.* — N.Y.: The Century Co., 1932. — P. 123–125, 492–502.
9. *Akkerman W.* Begründung einer strengen implication // J. Symbolic logic. — 1956. — Vol. 21, no. 2. — P. 115 – 126.

UDC 51(091)

Implication in the works of logics of the first half of the XX century

Z.A. Kuzicheva*

* *Chair of the History of Mathematics and Mechanics,*
Moscow State University,
Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

The speaker will review the treatment of implication by the logics belonging to D. Hilbert's school (H. Weyl, P. Bernays, W. Ackermann, A. Schmidt, etc.) in comparison with the results of the previous generation of authors, such as I. Lewis, A.E. Ellis, MacColl and A. De Morgan. Another goal of the speaker is to compare the approach to implication of W. Akermann with that of S.A. Yanovskaya which she had depeloved over the course of lectures on mathematical logic at MSU Department of Philosophy in the 1950s.

Keywords: strict implication, strong implication, consequence, modality, necessity, possibility.