УДК 519.214

О неклассических вариантах теоремы Линдеберга-Феллера

Ш. К. Форманов*

* *Отдел теории вероятностей и математической статистики, Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, ул. Дурмон йули, 29, Ташкент, Узбекистан, 100125*

Аннотация. Хорошо известно, что классическое условие Линдеберга является достаточным для справедливости центральной предельной теоремы (CLT). Оно также будет необходимым в случае, когда слагаемые удовлетворяют условию равномерной бесконечной малости (теорема Феллера). Предельные теоремы для распределения сумм независимых случайных величин, не использующие условия равномерной бесконечной малости, стали называться неклассическими.

В настоящей работе приведен неклассический вариант теоремы Линдеберга-Феллера. Установлены точные оценки характеристик Линдеберга, Ротаря, использующихся при доказательствах неклассических вариантов CLT через разности функций распределения сумм независимых случайных величин (в схеме серий) и стандартной нормальной функции распределения. Эти результаты уточняют теорему Феллера.

Ключевые слова: Центральная предельная теорема, условия равномерной бесконечной малости, неклассическая теорема Линдеберга-Феллера.

Пусть $X_{n1}, X_{n2}, ..., X_{nn}, n = 1, 2, ...$ - последовательность серий независимых случайных величин (с.в.).
Будем считать, что

$$\mathsf{E}X_{nj} = 0, \quad \mathsf{E}X_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2, \quad j = 1, 2, ...,$$

$$S_n = X_{n1} + ... + X_{nn}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^2 = 1.$$

Положим

$$F_n(x) = P\left(S_n < x\right), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

$$\Delta_n = \sup_x \left|F_n(x) - \Phi(x)\right|.$$

Хорошо известно, что условие

$$\max_{1 \le j \le n} \sigma_{nj} \to 0, \qquad n \to \infty \qquad \text{(U)}$$

называется условием равномерной бесконечной малости последовательности независимых с.в. $\{X_{nj},\, j \geq 1\}$. Будем говорить, что эта последовательность с.в. удовлетворяет условию Линдеберга, если для любого $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \to 0, \quad n \to \infty. \qquad \text{(L)}$$

Здесь $I(A)$ обозначает индикатор события A.
Хорошо известно, что при выполнении условия (L)

$$\Delta_n \to 0, \qquad n \to \infty,$$

что и представляет собой содержание Центральной Предельной Теоремы (CLT). Уточнением последней теоремы является теорема Линдеберга-Феллера, которую в логической схеме можно представить в виде

$$(U) \,\&\, (L) \Leftrightarrow (CLT)$$

т.е. при выполнении условия равномерной бесконечной малости (U) условие Линдеберга выполняется.

Следуя В.М.Золотареву [1] предельные теоремы, доказанные без привлечении условия (U), называются неклассическими. Первые неклассические варианты CLT доказаны В.М.Золотаревым в 1967 году и В.И.Ротарем в 1975 году (см. [1], [2]).

В работах [3], [4] приведена следующая оценка величины $L_n(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, которая обобщает теоремы Линдеберга-Феллера.

Теорема А. Существует абсолютная константа $C > 0$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$

$$(1 - e^{-\varepsilon^2/4}) \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \leq C(\Delta_n + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^4). \qquad (1)$$

Замечание. Очевидно, что при выполнении условия (U) в силу условия $\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^2 = 1$

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^4 \leq \max_j \sigma_{nj}^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, из оценки (1) следует, что если последовательность независимых с.в. $\{X_{nj},\, j \geq 1\}$ удовлетворяет CLT (т.е. $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$), то условие Линдеберга

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \to 0$$

выполняется для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$.
Положим
$$F_{nj}(x) = P(X_{nj} < x),$$
$\Phi_{nj}(x)$ - функция нормального распределения с параметром $(0,\, \sigma_{nj}^2)$ $(j = 1, 2, ...)$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx.$$

Теорема В. (В.И.Ротарь [2]). Для того, чтобы имела место CLT, необходимо и достаточно

$$R_n(\varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty \tag{2}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Приведенная теорема В является неклассическом вариантом CLT и обобщением теоремы Линдеберга-Феллера. На самом деле можно доказать, что имеет место оценка: при некотором $C > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$
$$R_n(\varepsilon) \le C(L_n(\varepsilon) + \max_j \sigma_{nj}^2).$$
Условие (2)
$$\{R_n(\varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall \varepsilon > 0\}$$
называют «разностным аналогом» условия Линдеберга.

Теорема Линдеберга-Феллера и теорема В обобщены в работе Ш.К.Форманова [5] с использованием характеристики «близости распределений» величины

$$\alpha_n\left(T\right) = \sum_j \sup_{|t| \le T} \left|f_{nj}\left(t\right) - g_{nj}\left(t\right)\right|, \quad T > 0,$$

где $f_{nj}(t)$ и $g_{nj}(t)$ - характеристические функции соответствующих распределений F_{nj} и Φ_{nj}. Введем следующие обозначения:

$$R_n^{(1)} = R_n\left(1\right) = \sum_j \int_{|x|\ge 1} |x| \left|F_{nj}\left(x\right) - \Phi_{nj}\left(x\right)\right| dx,$$

$$R_n^{(2)} = \sum_j \int_{|x|\le 1} x^2 \left|F_{nj}\left(x\right) - \Phi_{nj}\left(x\right)\right| dx,$$

$$R_n^{(3)} = \sum_j \int_{|x|\le 1} |x|^3 \left|F_{nj}\left(x\right) - \Phi_{nj}\left(x\right)\right| dx,$$

$$\delta_n = R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + R_n^{(3)}.$$

Теорема 1. Имеет место логическое соотношение

$$\{R_n(\varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall \varepsilon > 0\} \Leftrightarrow \{\delta_n \to 0, \quad n \to \infty\}.$$

Путем сравнения теоремы B и теоремы 1 получаем, что справедлива следующая

Теорема 2. Для того, чтобы для последовательности $\{X_{nj},\, j \geq 1\}$ имела место CLT, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\delta_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

По ходу доказательства теорем 1 и 2 можно установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 3. При некотором $C > 0$

$$R_n(\varepsilon) \leq C(\delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2)$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. При некотором $C > 0$

$$\delta_n \leq C(\Delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2).$$

Теорема 5. При некотором $C > 0$

$$R_n(\varepsilon) \leq C(\Delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2)$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Теорема 6. При любом $T > 0$ и некотором $C > 0$

$$\alpha_n(T) \leq C(\Delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2).$$

Заключение

Теоремы 3-6 обобщают приведенную выше теорему Линдеберга-Феллера и являются аналогами теоремы A в терминах различных числовых характеристик, используемых при доказательствах неклассических вариантов CLT. Из теоремы 1 следует, что теорема 2 является обобщением теоремы B (В.И.Ротарь), поскольку из условия (2) следует выполнения предельного соотношения

$$\delta_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

При этом следует отметить, что проверка последнего условия осуществляется легче, чем проверка условия

$$R_n(\varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Литература

1. *Золоторев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986. — 415 с.
2. *Rotar V.* Probability Theory. — World Scientific Publishing. 1997. — 417 p.
3. *Hall P.* Rates on convergence in the central limit theorem. — Pitman Adv. Publ. Progr. Boston-London. 1984. — 257 p.
4. *Chen L.H.Y., Shao Q.-M.* Steins method for normal approximation. — Lect. Note. Ser., 2005. — 61 p.
5. *Formanov Sh. K.* The Stein-Tikhomirov method and nonclassical CLT // VIth Inter. Conf. Modern Problems in Theor. and Appl. Probab. Novosibirsk, 2016. — P. 19–20.

UDC 519.214

On nonclassical versions of the Lindeberg-Feller theorem

Sh. K. Formanov*

* *Department of Probability theory and mathematical statistics,*
Institute of mathematics Uzbek Academy of Sciences,
Durmon yoli str. 29, Tashkent, 100125, Uzbekistan

It is well known that the classical Lindeberg condition is sufficient for validity of the central limit theorem. It will be also a necessary if the summands satisfy the condition of infinite smallness (Feller's theorem). The limit theorems for the distributions of the sums of independent random variables which do not use the condition of infinite smallness were called non-classical.

In this paper a non-classical version of Lindeberg-Feller theorem is given. The exact bounds for the Lindeberg, Rotar characteristics using the difference of the distribution of sum of independent random variables and a standard normal distribution are established. These results improve Feller's theorem.

Keywords: The central limit theorem, the conditions for uniform infinite smallness, the nonclassical theorem of Lindeberg-Feller.