УДК 517.521.75; 519.2

О некоторых недавних исследованиях в тауберовой теории и их применениях в теории вероятностей

А. Л. Якымив*

* *Отдел теории вероятностей и математической статистики, Математический институт им. В.А. Стеклова, ул. Губкина, д. 8, Москва, Россия, 119991*

Аннотация. Доклад состоит из двух частей: воспоминаний об А.Д. Соловьёве и небольшого обзора некоторых недавних исследований в тауберовой теории с их вероятностными применениями. В воспоминания входит период 1974–1977 годов, когда автор был ещё студентом на кафедре теории вероятностей МГУ. Также туда входит период 1997–1998 годов, когда Александр Дмитриевич был назначен Советом МИАН оппонентом диссертации автора на тему: "Вероятностные приложения тауберовых теорем". Во второй части доклада будут сформулированы результаты в тауберовой теории, полученные недавно А.А. Боровковым (2008), С. Резником и Г. Самородницким (2015), С.М. Али (2016) и автором (2017), а также их применения при исследовании асимптотики "хвостов" быстро убывающих на бесконечности устойчивых законов, для изучения совместного распределения двух случайных величин, описывающих рост направленных сетей, в финансовой математике и при исследовании поведения распределений типа кратного степенного ряда на границе их существования, соответственно.

Ключевые слова: тауберовы теоремы, вероятностные применения.

1. Введение. Воспоминания об А.Д. Соловьёве

Многие из нас, студентов кафедры теории вероятностей МГУ 1974–1977 годов, любили ходить на общекафедральный семинар по теории массового обслуживания и теории надёжности под руководством Б.В. Гнеденко, А.Д. Соловьёва и Ю.К. Беляева. Уже тогда по факультету ходила большая слава об Александре Дмитриевиче, как об одном из создателей теории надёжности, великолепном аналитике и блестящем лекторе. Поэтому мы с удовольствием слушали его выступления на этом семинаре. Иногда удавалось присутствовать и на его лекциях. И, хотя мы многие из материалов лекций уже знали, но они подавались в таком блестящем виде, что воспринимались как совершенно новые.

Познакомиться поближе с А.Д. Соловьёвым мне удалось примерно 20 лет назад, когда я представил к защите в МИАН диссертацию на тему: "Вероятностные приложения тауберовых теорем". Помню, я очень обрадовался, когда мой научный руководитель профессор Борис Александрович Севастьянов предложил кандидатуру Александра Дмитриевича в качестве одного из оппонентов. В самом деле, он, как всемирно известный аналитик и выдающийся специалист по теории вероятностей и её приложениям, смог бы по достоинству оценить как аналититческую часть диссертации, так и вероятностную. Уже при первой встрече, когда я принёс ему свою диссертацию, он меня сильно удивил. Он спросил сразу, к какой книге по тауберовой теории наиболее близка аналитическая часть моей диссертации. Оказалось, что он очень хорошо знаком с тауберовой теорией. Дело в том, что, как известно, в теории вероятностей и её приложениях применяется большое количество аналитических методов, и с каждым годом их становится всё больше, и знать их все просто не представляется возможным. Позже, за чашкой чая, он рассказал, что, будучи ещё аспирантом, он сдавал экзамен по тауберовой теории. В частности, туда входила известная книга Г. Харди "Расходящиеся ряды" и тауберовы теоремы Н. Винера. В этом, как мне кажется, чувствовалось влияние его научного руководителя, блестящего аналитика, профессора Александра Осиповича Гельфонда. После защиты диссертации, он у меня спросил, удалось ли ему хорошо выступить, так как в этот день он себя немного неважно чувствовал после участия в конференции в Польше. Я ответил, что его выступление, несмотря на плохое самочувствие, было, как всегда, очень ярким. И с этим согласились присутствовавшие поблизости члены Совета. И ещё я хочу сказать, что Борис Александрович Севастьянов, большой друг Александра Дмитриевича, часто рассказывал о нём. В частности, он говорил, что Александр Дмитриевич умел очень быстро и безошибочно прикидывать предполагаемый результат. В заключение скажу, что я очень рад, что жизнь меня свела со столь выдающимся учёным.

2. Несколько тауберовых теорем и их вероятностные применения

Как всегда, имеется большое количество теорем тауберова типа, в том числе и недавних. В этой части доклада будут приведены некоторые последние результаты в тауберовой теории, наиболее интересных, по мнению докладчика, с точки зрения их применения в теории вероятностей.

Пусть ξ - с.в. с распределением F, $\psi(\lambda) = \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) < \infty \quad \forall\lambda \geq 0$, причём $\psi(\lambda) \to \infty \quad (\lambda \to \infty)$. Положим $m(\lambda) = \ln\psi(\lambda), a(\lambda) = m'(\lambda)$, $b^2 = b^2(\lambda) = m''(\lambda)$, $\Lambda(x) = \sup_\lambda(\lambda x - m(\lambda))$ (преобразование Лежандра $m(\lambda)$), $\lambda(x)$ - точка, в которой этот супремум достигается. А.А. Боровков в [2] доказал следующую тауберову теорему.

Теорема 1 *Пусть для произвольного фиксированного $t_0 > 0$ и $\lambda \to \infty$ рвномерно по $|t| \leq t_0$ выполняется $m''(\lambda + it/b) = m''(\lambda)(1 + o(1))$ и отношение $|\psi(\lambda + it/b)|/\psi(\lambda)$ интегрируемо по t равномерно по всем достаточно большим λ. Тогда распределение F имеет плотность*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda''(x)}}\exp(-\Lambda(x))(1 + o(1)) \quad (x \to \infty).$$

В статье С.М. Али [1] рассматривается произвольная действительная с.в. Z, для которой на некотором конечном интервале действительной прямой существует функция $\Lambda(\mu) \equiv \ln \mathsf{E} e^{\mu Z} < \infty\ \forall \mu : 0 < \mu < \mu^* < \infty$, причём $\Lambda(\mu) \to \infty\ (\mu \to \mu^*)$ и $\varphi(x) = \ln \Lambda(\mu^* - 1/x),\ x \geq 1/\mu^*$. Справедлива следующая тауберова теорема.

Теорема 2 *Пусть функция $f^{(-1)}(x)$, обратная к функции*

$$f(x) = x^2 \varphi'(x),$$

правильно меняется на бесконечности вместе со всеми модулями её производных, причём показатель $f^{(-1)}(x)$ равен $\gamma \in (0,1)$. Тогда

$$\limsup_{x \to +\infty} (\ln \mathsf{P}\{Z > x\} + \Lambda^*(x)) / \ln x \in [-c, 0]$$

и

$$\liminf_{x \to +\infty} (\ln \mathsf{P}\{Z > x\} + \Lambda^*(x)) / \ln x \leq -c,$$

где $\Lambda^*(x) = \sup_{\mu \in (0,\mu^*)} (\mu x - \Lambda(\mu)),\ c = (1-\gamma)/2$.

Третий результат касается изучения асимптотики на бесконечности распределений многомерных случайных величин С. Резника и Г. Самородницкого [3]. Через $M_+(E)$ обозначим совокупность мер Радона на ограниченных борелевских множествах топологического пространства E, то есть, конечных на компактных множествах из E. При $U_t,\ U \in M_+(E)$ мы будем писать, что $U_t \xrightarrow{v} U$ при $t \to \infty$, если $\int_E f(x) U_t(dx) \to \int_E f(x) U(dx)$ для произвольной непрерывной функции f на E с компактным носителем. Пусть $U \in M_+(R_+^n)$, причём $\widetilde{U}(\lambda) = \int_{R_+^n} e^{-(\lambda, \mathbf{x})} U(d\mathbf{x}) < \infty,\ \forall \lambda > \mathbf{0}$ (последнее неравенство значит, что $\lambda \in \operatorname{int} R_+^n$). Кроме этого, пусть заданы функции $b_i(t)$, правильно меняющиеся на бесконечности с показателями $\gamma_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$, причём $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Положим $U_t(x) = U(b(t)x)/t \quad (\forall \mathbf{x} > \mathbf{0})$, где вектор $\mathbf{b}(t)\mathbf{x}$ состоит из соответствующих покомпонентных произведений. Пусть для произвольного $\mathbf{x} > \mathbf{0}$

$$\lim_{y \to \infty} \limsup_{t \to \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^n [v_i > y]} \exp\left(-\sum_{i=1}^n v_i / x_i \right) U_t(d\mathbf{v}) = 0.$$

Теорема 3 *Если при $t \to \infty$ для всех $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ $\quad \widetilde{U}(\mathbf{1}/\mathbf{b}(t)\mathbf{x})/t \to \Psi(\mathbf{x}) < \infty$, где $\mathbf{1}/\mathbf{b}(t)\mathbf{x} = (1/(b_1(t)x_1), \ldots, 1/(b_n(t)x_n)$, то существует функция $U_\infty(\mathbf{x})$ такая, что $\widetilde{U}_\infty(\lambda) = \Psi(\mathbf{1}/\lambda)\ \forall \lambda > \mathbf{0}$, причём $U_t \xrightarrow{v} U$ и $U_t(\mathbf{x}) = U(\mathbf{b}(t)\mathbf{x})/t \to U_\infty(\mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{x} > \mathbf{0})$.*

Рассмотрим множество $[0, \infty]$, компактифицированное точкой ∞. Положим $E = [0,\infty]^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$. Далее в статье рассматривается вектор (X, Y), где с.в. X и Y имеют наглядную интепретацию в задаче роста направленных сетей. Для них доказывается, что

$$t\mathsf{P}\{(X/a(t) \geq x, Y/b(t) \geq y)\} \to \nu_0(x,y) \equiv \nu([x,\infty] \times [y,\infty]), \ \forall\ x, y > 0.$$

Доказательство сводится к k-кратному дифференцированию по x производящей функции $\varphi(x,y) = \mathsf{E}X^x Y^y$, где k - таково, что $\mathsf{E}X^k = \infty$ и далее к этой производящей функции применяется тауберова теорема 3, откуда выводится указанное выше соотношение. Пусть задана кратная последовательность $a(i) \geq 0,\ i \in Z_+^n$, причём при $x \in (0,1)^n$ сходится степенной ряд

$$B(x) = \sum_{i \in Z_+^n} a(i) x^i \equiv \sum_{i_1,\ldots,i_n \in Z_+} a(i_1,\ldots,i_n) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} > 0$$

и расходится при $x = \mathbf{1} \equiv (1,\ldots,1)$. Мы будем говорить, что с. в. ξ_x имеет распределение типа степенного ряда, если

$$\mathsf{P}\{\xi_x = i\} = \frac{a(i)x^i}{B(x)}, \quad \forall i \in Z_+^n, \quad x \in (0,1)^n.$$

Такие распределения используются в обобщённой схеме размещения [4]. Из замечания 3 статьи автора [5] следует

Лемма 1 *Пусть для произвольного* $\lambda \in R_+^n \equiv (0,\infty)^n$ *при*

$$b = (b_1,\ldots,b_n) \in R_+^n, \quad \min_{j=1,\ldots,n} b_j \to \infty$$

верно

$$\frac{B(\exp(-\lambda/b))}{B(\exp(-\mathbf{1}/b))} \to \Psi(\lambda) \in (0,\infty),$$

где $\exp(-\lambda/b) = (\exp(-\lambda_1/b_1),\ldots,\exp(-\lambda_n/b_n))$. *Тогда существуют такие числа* $\alpha_j \geq 0$, *что* $\Psi(\lambda) = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{\alpha_j},\ \forall \lambda \in R_+^n$. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *-* δ*-кольцо ограниченных борелевских множеств из* R_+^n. *Положим при* $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu_b(A) = \frac{1}{B(\exp(-\mathbf{1}/b))} \sum_{i:\ i \in Z_+^n,\ i/b \in A} a(i),$$

$$\nu(A) = \int_{A \cap [0,\infty)^n} \nu_1(dy_1) \ldots \nu_n(dy_n),$$

где $\nu_j(dy_j) = y_j^{\alpha_j - 1} dy_j / \Gamma(\alpha_j)$, *если* $\alpha_j > 0$ *и мера* ν_j *сосредоточена в нуле с весом 1, если* $\alpha_j = 0$. *Тогда при* $b = (b_1,\ldots,b_n) \in R_+^n$, *и* $\min_{j=1,\ldots,n} b_j \to \infty$ $\mu_b \Rightarrow \mu$, *то есть* $\mu_b(A) \to \nu(A)$ *для произвольного* $A \in \mathfrak{A}$ *с* $\nu(\partial A) = 0$.

Теорема 4 *Пусть выполнены все предположения леммы 1, причём все* $\alpha_j > 0$. *Кроме этого, предположим, что для каждого* $j = 1, \ldots, n$ *выполнено одно из следующих соотношений: при* $b = (b_1, \ldots, b_n) \in R_+^n$ *и* $\min_{l=1,\ldots,n} b_l \to \infty$ *для произвольной функции* $z_j = z_j(b) > 1, z_j = 1 + o(1)$ *выполнено одно из следующих неравенств:*

$$\liminf_{\min_{l=1,\ldots,n} b_l \to \infty} (f(b_1, \ldots, b_{j-1}, z_j b_j, b_{j+1}, \ldots, b_n) - f(b))/g(b) \geq 0;$$

$$\limsup_{\min_{l=1,\ldots,n} b_l \to \infty} (f(b_1, \ldots, b_{j-1}, z_j b_j, b_{j+1}, \ldots, b_n) - f(b))/g(b) \leq 0,$$

где $f(b) = a([b]),\ g(b) = B(\exp(-\mathbf{1}/b))/\prod_{j=1}^n b_j$. *Тогда для произвольного фиксированного* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R_+^n$ *при* $\min_{i=1,\ldots,n} b_i \to +\infty$

$$\frac{a([by])}{g(b)} = \frac{f(y_1 b_1, \ldots, y_n b_n)}{g(b)} \to \varphi(y) \equiv \frac{\prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j - 1}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}.$$

При этом последнее соотношение выполнено равномерно по $y \in K$ *для произвольного компакта* $K \subset R_+^n$. *Здесь* $a([by]) = a([b_1 y_1], \ldots, [b_n y_n])$.

Из леммы 1 и теоремы 4 выводится следующий результат.

Теорема 5 *Если выполнены условия леммы 1, то*

$$\xi_x(\mathbf{1} - x) \xrightarrow{D} (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

при $x \uparrow \mathbf{1}$, *где с.в.* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *независимы и* γ_j *имеет* Γ*-распределение с параметром* α_j, *если* $\alpha_j > 0$ *и сосредоточена в нуле, если* $\alpha_j = 0$. *Если выполнены предположения теоремы 4, то*

$$\frac{\mathsf{P}\{\xi_x = [y/(\mathbf{1} - x)]\}}{\prod_{j=1}^n (1 - x_j)} \to \frac{\prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j - 1} e^{-y_j}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}$$

при $x \uparrow \mathbf{1}$ *равномерно по* $y \in K$ *для произвольного компакта* $K \subset R_+^n$.

В [4] одномерный результат доказан методом моментов. Доказательство теоремы 5 при помощи леммы 1 и теоремы 4 существенно проще.

Автор глубоко признателен рецензентам за ценные замечания.

Литература

1. *Aly S. M.* From moment explosion to the asymptotic behavior of the cumulative distribution for a random variable // Теория вероятн. и ее примен. — 2016. — Т. 61, вып. 3. — С. 489–508.

2. *Боровков А. А.* Тауберовы и абелевы теоремы для быстро убывающих распределений и их приложения к устойчивым законам // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, вып. 5. — С. 1007–1018.
3. *Resnick S., Samorodnitsky G.* Tauberian theory for multivariate regularly varying distributions with application to preferential attachment networks // Extremes. — 2015. — Vol. 18, no. 3. — P. 349–367.
4. *Тимашёв А. Н.* Распределения типа степенного ряда и обобщённая схема размещения. —М.: Академия, 2016. — ISBN: 978-5902936-25–1.
5. *Якымив А. Л.* Тауберова теорема для кратных степенных рядов // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, вып. 2. — С. 143–172.

UDC 517.521.75; 519.2

On some recent investigations on Tauberian theory and their applications to probability theory

A. L. Yakymiv*

* *Department of Probability Theory and Mathematical Statistics,*
Steklov Mathematical Institute RAS,
Gubkin St. 8, 119991 Moscow, Russia

The report consists of two parts: memories of A.D. Solovyov and the small review of some recent researches in the Tauberian theory with their probabilistic applications. The period of 1974–1977 when the author was still a student at department of probability theory of MSU enters memoirs. Also there the period of 1997–1998 when Alexander Dmitrievich has been appointed by Council of MIAN the opponent of the author's dissertation: "Probabilistic applications of Tauberian theorems". In the second part of the report the results in the Tauberian theory received recently by A.A. Borovkov (2008), S. Reznick and G. Samorodnitsky (2015), S.M. Ali (2016) and the author (2017) and also their applications will be formulated at a research of an asymptotics of "tails" of the stable laws which are quickly decreasing on infinity, for studying of joint distribution of two random variables describing growth of the directed networks, in financial mathematics and at a research of behavior of generalized multiple power series distributions at the boundery of their existence, respectively.

Keywords: Tauberian theorems, probabililistic applications.