УДК 519.218.23

Предельные теоремы для ограниченных ветвящихся процессов

Г. К. Кобаненко[*]

[*] *Кафедра математической статистики и случайных процессов, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. Указаны условия, при которых траектории ограниченного ветвящегося процесса при условии невырождения с вероятностью 1 либо лишь конечное число раз выходят на верхнюю границу, либо бесконечно много раз выходят на верхнюю границу, либо совпадают с верхней границей, начиная с некоторого случайного момента.

Ключевые слова: ограниченный ветвящийся процесс, поведение траекторий, предельные теоремы.

1. Введение

Ветвящимся процессом Гальтона – Ватсона называется случайный процесс $\{\mu_t; t = 0, 1, 2, \dots\}$ с дискретным временем, определяющийся рекуррентными соотношениями

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_{t+1} = \begin{cases} \nu_1^{(t)} + \nu_2^{(t)} + \cdots + \nu_{\mu_t}^{(t)}, & \text{если } \mu_t > 0, \\ 0, & \text{если } \mu_t = 0, \end{cases}$$

в которых $\nu_i^{(t)}$ $(t \geqslant 0, i \geqslant 1)$ — независимые в совокупности неотрицательные одинаково распределенные случайные величины, принимающие целочисленные значения и определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Этот процесс можно рассматривать как модель изменений численности популяции частиц. В такой популяции первоначально имеется одна частица: $\mu_0 = 1$. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число потомков $\nu_1^{(0)}$ в соответствии с распределением

$$\mathbf{P}\left(\nu_1^{(0)} = m\right) = p_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

Каждая из новорожденных частиц также имеет единичную продолжительность жизни и в конце ее производит (независимо от остальных частиц) случайное число потомков в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_m,\, m = 0, 1, \dots\}$. Таким образом, при $t \geqslant 0$

$$\mu_{t+1} = \nu_1^{(t)} + \nu_2^{(t)} + \cdots + \nu_{\mu_t}^{(t)},$$

где $\nu_i^{(t)}$ — число потомков i-й частицы t-го поколения.

Ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона является цепью Маркова с множеством состояний $\{0, 1, \dots\}$ и поглощающим состоянием 0. Попадание траектории ветвящегося процесса в состояние 0 называется вырождением процесса. Вероятность вырождения ветвящегося процесса Гальтона – Ватсона q определяется равенством

$$q = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\,(\mu_t = 0)$$

и является наименьшим неотрицательным корнем уравнения $f(s) = s$, где $f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m s^m$ — производящая функция распределения числа потомков одной частицы. Основной задачей теории ветвящихся процессов является исследование вероятностных свойств их траекторий. Эти свойства в значительной мере определяются параметром $A = \mathbf{M}\nu_i^{(t)} = f'(1)$ — математическим ожиданием числа непосредственных потомков одной частицы. Если $A < 1$, то процесс называется докритическим, если $A = 1$ — то критическим, если $A > 1$ — то надкритическим. Если $A < 1$ или $A = 1$ и $f(s) \not\equiv s$, то вероятность вырождения $q = 1$, если же $A > 1$, то $q < 1$.

В настоящей работе рассматривается одна из модификаций классического ветвящегося процесса: ограниченный ветвящийся процесс $\{\xi_t,\ t = 0, 1, 2, \dots\}$. Он строится по тем же случайным величинам $\nu_i^{(t)}$, что в (1), и по целочисленной функции $g(t)$, $t = 1, 2, \dots$, принимающей целые положительные значения:

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_{t+1} = \begin{cases} \min\left(g(t+1), \nu_1^{(t)} + \nu_2^{(t)} + \dots + \nu_{\xi_t}^{(t)}\right), & \text{если}\, \xi_t > 0, \\ 0, & \text{если}\, \xi_t = 0; \end{cases}$$

Другими словами, ограниченный ветвящийся процесс отличается от процесса Галльтона – Ватсона тем, что для каждого $t \geqslant 1$ из совокупности потомков частиц $(t-1)$-го поколения удаляются «лишние» частицы, если это число потомков оказывается больше $g(t)$.

Данная модификация ветвящихся процессов довольно слабо изучена. Одна из трудностей ее изучения состоит в том, что произвольность ограничивающей функции $g(t)$ не позволяет в полной мере применять аппарат производящих функций, который хорошо работает в классическом случае. Единственным результатом для ограниченных ветвящихся процессов с дискретным временем является теорема, доказанная А.М.Зубковым в [1]:

Теорема 1 *Вероятность невырождения надкритического ограниченного ветвящегося процесса ξ_t положительна тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{t=1}^{\infty} q^{g(t)}$, где q — вероятность вырождения обычного процесса Гальтона-Ватсона с той же производящей функцией числа потомков одной частицы.*

Аналогичная теорема для ограниченных ветвящихся процессов с непрерывным временем была доказана в [2]. В настоящей работе найдены условия на ограничивающую функцию $g(t)$, при которых траектория ограниченного ветвящегося процесса при условии невырождения почти наверное бесконечно много раз выходит на верхнюю границу, либо почти наверное, начиная с некоторого случайного момента, полностью совпадает с верхней границей.

2. Основная часть

Первое утверждение задает необходимые и достаточные условия на процесс ξ_t и ограничивающую функцию $g(t)$ для того, чтобы траектория процесса почти наверное достигала верхней границы бесконечное число раз.

Теорема 2 *Пусть* $A = \mathbf{M}\nu_1^{(1)} > 1, \mathbf{M}\nu_1^{(1)} \ln(\nu_1^{(1)} + 1) < \infty, \mathbf{P}\{\nu_1^{(1)} = A\} < 1$, q *— наименьший корень уравнения* $f(s) = s$, *где* $f(s) = \mathbf{M}s^{\nu_1^{(1)}}$ *— производящая функция числа потомков одной частицы, и ряд* $\sum_{t=1}^{\infty} q^{g(t)}$ *сходится. Тогда*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{g(t)}{A^t} = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{P}(|\,\{t\colon \xi_t = g(t)\}\,| = \infty|\liminf_{t\to\infty} \xi_t > 0) = 1$$

Следствие 1 *Если выполнены условия теоремы 2 и* $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{A^t} > 0$, *то*

$$\mathbf{P}(|\,\{t : \xi_t = g(t)\}\,| < \infty|\liminf_{t\to\infty} \xi_t > 0) = 1.$$

Другими словами, процесс ξ_t *почти наверное достигает границы* $g(t)$ *лишь конечное число раз.*

Следующие две теоремы задают достаточные условия на процесс ξ_t и ограничивающую функцию $g(t)$ для того, чтобы траектория процесса почти наверное совпадала с верхней границей, начиная с некоторого случайного момента времени.

Теорема 3 *Пусть* $A = \mathbf{M}\nu_i^{(t)} > 1, \mathbf{M}\nu_i^{(t)} \ln(\nu_i^{(t)} + 1) < \infty$ *и* $b = \mathbf{M}|\nu_i^{(t)} - \mathbf{M}\nu_i^{(t)}|^{1+\varepsilon} < \infty$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. *Пусть ограничивающая функция g(t) такова, что:*

1) *ряд* $\sum\limits_{t=1}^{\infty} q^{g(t)}$ *сходится,*

2) *существует такая неотрицательная последовательность* $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$, *что ряд* $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_t^{1+\varepsilon}}$ *сходится и* $g(t+1) < Ag(t) - c_t(Ag(t))^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, *начиная с некоторого* T*;*

3) $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{A^t} = 0$,

Тогда $\mathbf{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty}(\xi_t - g(t)) = 0 \,|\, \liminf\limits_{t\to\infty}\xi_t > 0\right) = 1$.

Пример. Пусть $g(t) = \left[\dfrac{A^t}{\ln t}\right]$ и существует $\mathbf{M}(\nu_i^{(t)})^2 < \infty$ Проверим выполнение условий теоремы.

1) Ряд $\sum\limits_{t=1}^{\infty} g^{\left[\frac{A^t}{\ln t}\right]}$ сходится по признаку Даламбера.

2) $\dfrac{g(t)}{A^t} \le \dfrac{1}{\ln t} = o(1) \Rightarrow \liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{A^t} = 0$.

3) $g(t+1) \le \dfrac{A^{t+1}}{\ln(t+1)} = A\dfrac{A^t}{\ln t}\dfrac{\ln t}{\ln(t+1)} < A\dfrac{A^t}{\ln t}\dfrac{\ln t}{\ln t + \frac{1}{t+1}} =$

$$= A\frac{A^t}{\ln t}\frac{1}{1+\frac{1}{(t+1)\ln t}} < A\frac{A^t}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{2(t+1)\ln t}\right) =$$

$$= A\frac{A^t}{\ln t} - A\frac{A^t}{\ln t}\frac{1}{2(t+1)\ln t} < A(g(t)+1) - A(g(t)-1)\frac{1}{2(t+1)\ln t} =$$

$$= Ag(t) - \sqrt{Ag(t)}\left(\frac{\sqrt{Ag(t)}}{2(t+1)\ln t} - \frac{\sqrt{A}}{2(t+1)\sqrt{g(t)}\ln t}\right) < Ag(t) - t\sqrt{Ag(t)}.$$

Пусть $c_t = t$. Тогда для границы $g(t) = \left[\dfrac{A^t}{\ln t}\right]$ выполнены все условия теоремы 2, а значит, при условии невырождения траектории процесса ξ_t почти наверное, начиная с некоторого случайного момента, совпадают с $g(t)$.

Можно доказать похожую теорему без предположения о существовании степенных моментов порядка выше первого при более сильных условиях, налагаемых на функцию $g(t)$.

Теорема 4 *Пусть* $A = \mathbf{M}\nu_i^{(t)} > 1, \mathbf{M}\nu_i^{(t)}\ln(\nu_i^{(t)}+1) < \infty$. *Пусть ограничивающая функция g(t) такова, что:*

1) $\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{\ln(t)} = \infty$,

2) существует $B \in (0; A)$ *такое что, начиная с некоторого* t, $g(t+1) \le Bg(t)$.

Тогда $\mathbf{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty}(\xi_t - g(t)) = 0 \,|\, \liminf\limits_{t\to\infty}\xi_t > 0\right) = 1$

Последняя теорема задает необходимое условие на функцию $g(t)$ для того, чтобы траектория процесса почти наверное совпадала с верхней границей, начиная с некоторого случайного момента времени.

Теорема 5 *Пусть* $\mathbf{M}\nu_1^{(1)} = A > 1$ *и* $\mathbf{D}\nu_1^{(1)} = \sigma^2 \in (0, \infty)$. *Тогда если* $\mathbf{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty}(\xi_t - g(t)) = 0 | \liminf\limits_{t\to\infty} \xi_t > 0\right) = 1$, *то последовательность* $a_t = \dfrac{g(t)}{A^t}$ *монотонно убывает к 0, начиная с некоторого момента.*

3. Заключение

Результат данной работы представляет из себя набор необходимых и достаточных условий для определенного поведения траекторий ограниченного ветвящегося процесса. Данный результат является новым для малоисследованной модели и развивающим аналитические и вероятностные методы.

Благодарности

Автор признателен А. М. Зубкову за постановку задач и конструктивную критику.

Литература

1. *Зубков А. М.* Условия вырождения ограниченного ветвящегося процесса // Математические заметки. — 1970. — Т. 8, вып. 1. — Р. 9–18.
2. *Зубков А. М.* Условие вырождения ограниченного ветвящегося процесса с непрерывным временем // Теория вероятн. и ее примен. — 1972. — Т. 17, вып. 2. — Р. 296–309.

UDC 519.218.23

Limit theorems for bounded branching processes

G. K. Kobanenko*

* *Department of Mathematical Statistics and Stohastic Processes,*
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

This paper contains the conditions for trajectories of a bounded branching process under a condition of non-degenerating either to have finite or infinite number of reaching the top bound level, or coincide with the top bound level starting from some random moment of time with probability 1.

Keywords: bounded branching process, trajectories behavior, limit theorem.