УДК 519.218.31

Об условиях инвариантности стационарного распределения СМО с ресурсами относительно распределения объема заявки

Э. С. Сопин[*][†]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,*
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198
[†] *Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН*
ул. Вавилова 44 кор.2, Москва, Россия, 119333

Аннотация. В данной работе проведен анализ системы массового обслуживания с ограниченными ресурсами, в которой интенсивности обслуживания и поступления заявок зависят от состояния системы. Для рассматриваемой модели были получены условия, при которых стационарное распределение системы не зависит от распределения объема работы, необходимого для обслуживания заявки, а определяется только его средним значением.

Ключевые слова: система массового обслуживания, ограниченные ресурсы, инвариантность.

1. Введение

В данной работе исследуется вопрос об инвариантности относительно распределения времени обслуживания заявки стационарного распределения многолинейной системы с ресурсами. Ранее аналогичная теорема была доказана для СМО с ресурсами с постоянными интенсивностями поступления и обслуживания [1]. В [2] было предложено обобщение модели с ресурсами, в которой интенсивности обслуживания и поступления зависят от состояния системы, и показано, что в случае экспоненциального времени обслуживания и пуассоновского входящего потока стационарное распределение также имеет мультипликативный вид. В данной работе получены условия, при которых для обобщенной модели справедливо свойство инвариантности относительно распределения времени обслуживания, на основе методов, использовавшихся при анализе классических моделей [3], [4].

2. Описание модели

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания ёмкости $N \leq \infty$. Предположим, что поступающий поток является пуассоновским с параметром λ_k, зависящим от числа k заявок в системе, а объёмы работ, которые необходимо выполнить для обслуживания заявок, независимы между собой, от поступающего потока, и экспоненциально распределены с параметром $\mu = \frac{1}{b}$. Предположим также, что прибор обслуживает заявки с постоянной, зависящей от числа k

заявок в системе, скоростью σ_k. Все заявки, находящиеся в системе, обслуживаются прибором одновременно, поэтому скорость обслуживания каждой заявки равна $\frac{\sigma_k}{k}$. К примеру, при $\sigma_k = 1, 1 \le k \le N$ рассматриваемая СМО представляет собой аналог системы с разделением процессора, а при $\sigma_k = k, 1 \le k \le N$ – аналог полнодоступного пучка. Система располагает ограниченным объёмом ресурсов M типов и функционирует следующим образом.

1. Каждой находящейся в системе заявке требуется некоторое количество ресурса каждого типа.
2. Поступившая заявка теряется, если в момент поступления количество требуемого ей ресурса превышает количество свободного ресурса этого типа.
3. В момент поступления заявки объём свободного ресурса каждого типа уменьшается на величину ресурса, выделенного этой заявке.
4. В момент ухода заявки объём свободного ресурса каждого типа увеличивается на величину ресурса, выделенного этой заявке.

Обозначим R_m общий объём ресурса типа m, и $\mathbf{r}_j = (r_{j1}, r_{j2}, \ldots, r_{jM})$ вектор объёмов ресурсов, необходимых j-й поступившей заявке $j = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что случайные векторы $\mathbf{r}_j$ не зависят от процесса поступления и обслуживания заявок, независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $F(\mathbf{x})$.

Будем считать, что поступившие заявки располагаются в очереди в порядке поступления и опишем состояние системы в момент t процессом $X(t) = (\xi(t), \gamma(t))$. Здесь $\xi(t)$ – число заявок в системе и $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_{\xi(t)}\big)$, где $\gamma_i(t)$ – вектор объёмов ресурсов, занимаемых i-ой заявкой. Состояние системы может измениться только в моменты $t_j, j = 1, 2, \ldots$, когда либо в систему поступает, либо её покидает заявка.

Введем обозначения для стационарных вероятностей процесса $X(t)$:

$$p_0 = P\{\xi(t) = 0\},$$

$$P_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = P\{\xi(t) = k, \gamma_1(t) \le \mathbf{x}_1, \ldots, , \gamma_k(t) \le \mathbf{x}_k\},$$

$$1 \le k \le N, \sum_{i=1}^{k} \mathbf{x}_i \le \mathbf{R}.$$

Стационарное распределение системы имеет следующий вид [2]:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{N} F^{(k)}(\mathbf{R}) b^k \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}\right)^{-1}, \tag{1}$$

$$P_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = p_0 F(\mathbf{x}_1), \ldots, F(\mathbf{x}_k) b^k \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}, \tag{2}$$

$$1 \le k \le N, \sum_{i=1}^{k} \mathbf{x}_i \le \mathbf{R}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \ge \mathbf{0},$$

где $F^{(k)}(\mathbf{x})$ есть k-кратная свертка функции распределения $F(\mathbf{x})$.

3. Условия инвариантности относительно распределения объемов работ

Рассмотрим поведение системы в случае, когда распределение объемов работ не является экспоненциальным, а распределено в соответствии с ФР $B(x)$ с тем же средним $\mu = \frac{1}{b}$. Состояние системы в момент t описывается случайным процессом $Y(t) = (\xi(t), \gamma(t), \beta(t))$, где, как и прежде, $\xi(t)$ – число заявок в системе, $\gamma(t)$ описывает объёмы ресурсов, занимаемых каждой заявкой, а третья компонента $\beta(t) = \big(\beta_1(t), \dots, \beta_{\xi(t)}(t)\big)$, где $\beta_i(t)$ - объем обслуженной работы i-й заявки. Будем считать, что поступившая заявка может получить любой номер с равной вероятностью, т.е. при поступлении заявки с требованием $\mathbf{r}$ система переходит из состояния $(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)$ в одно из состояний $(k+1, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_k), 0 \le i \le k$ с вероятностью $\frac{1}{k+1}$. Будем рассматривать поведение системы в стационарном режиме. Обозначим

$$Q\left(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)\right) =$$

$$= P\left\{\xi(t) = k, \gamma_1(t) \le \mathbf{r}_1, \dots, \gamma_k(t) \le \mathbf{r}_k, \beta_1(t) \le x_1, \dots, \beta_k(t) \le x_k\right\}.$$

Предположим, что существует плотность

$$q(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)) = \frac{\partial}{\partial x_1 \dots \partial x_k} Q(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)),$$

тогда выписав уравнения для переходов системы за малый промежуток времени Δt, после серии преобразований получим систему (3):

$$\lambda_0 q^*(0) F(\mathbf{R}) = \sigma_1 \int\limits_{0 \le \mathbf{r} \le \mathbf{R}} \int\limits_0^\infty q^*(1, d\mathbf{r}, x) dB(x),$$

$$\frac{\sigma_k}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q^*(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k))}{\partial x_i} +$$

$$+\lambda_k \int\limits_{\substack{0 \le \mathbf{s}_i \le \mathbf{r}_i, \\ 1 \le i \le k}} q^*(k, d\mathbf{s}_1, \dots, d\mathbf{s}_k), (x_1, \dots, x_k)) F\left(\mathbf{R} - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}_i\right) dB(x) =$$

$$= \frac{\sigma_k}{k+1}\times$$

$$\times \sum_{j=1}^{k+1} \int\limits_{\substack{0\le \mathbf{s}_i\le \mathbf{r}_i,\\ 1\le i\le k\\ \mathbf{s}\le \mathbf{R}-\sum_{i=1}^{k}\mathbf{s}_i}} \int\limits_0^\infty q^*(k+1,(d\mathbf{s}_1,...,d\mathbf{s},...,d\mathbf{s}_k),(x_1,...,x,...,x_k))dB(x),$$

$$\sum_{i=1}^{k}\mathbf{r}_i \le \mathbf{R}, 1\le k\le N-1, \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_N}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial q^*(N,(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N),(x_1,...,x_N))}{\partial x_i}=0,$$

$$q^*(k+1,(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r},\mathbf{r}_i,\dots,\mathbf{r}_k),(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_k)) =$$

$$\frac{\lambda_k}{k+1}F(\mathbf{r})q^*(k,(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_k),(x_1,\dots,x_k)), \sum_{i=1}^{k+1}\mathbf{r}_i\le \mathbf{R}, 0\le k\le N-1,$$

где $q^*(k,(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_k),(x_1,\dots,x_k)) = \frac{q(k,(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_k),(x_1,\dots,x_k))}{(1-B(x_1))\dots(1-B(x_k))}$.

Предположим, что вероятности $q^*(\cdot)$ не зависят от переменных x_1, ... , x_k и имеют вид

$$q^*(k,(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_k),(x_1,\dots,x_k)) = p_0F(\mathbf{x}_1),\dots,F(\mathbf{x}_k)\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}. \quad (4)$$

Подставив (4) в систему уравнений (3), легко убедиться, что равенство достигается во всех уравнениях, кроме последнего. Последнее уравнение системы (3) принимает вид

$$p_0F(\mathbf{x}_1),\dots,F(\mathbf{x}_k)F(\mathbf{x})\prod_{i=1}^{k+1}\frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i} = \frac{\lambda_k}{k+1}p_0F(\mathbf{x})\prod_{i=1}^{k}F(\mathbf{x}_i)\frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}. \quad (5)$$

Очевидно, что равенство в выражении (5) достигается только в случае $\sigma_k = k, 1\le k\le N$. Следовательно, формулы (1) и (2) задают стационарное распределение процесса $Y(t)$, при этом они не зависят от распределения $B(x)$, а определяются только средним значением объема работы, необходимого для обслуживания заявки.

4. Заключение

В работе была исследована СМО с ресурсами, интенсивности поступления и обслуживания которой зависят от состояния системы. Было показано, что инвариантность стационарного распределения системы от распределения объема работ, приносимых заявкой, достигается только в случае, когда СМО функционирует по принципу полнодоступного пучка с ресурсами. В дальнейшем планируется доказать данный факт, не накладывая ограничений на существование плотности распределения.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 16-11-10227.

Литература

1. *Naumov V A., Samouylov K. E., Sopin E. S.* On the insensitivity of stationary characteristics to the service time distribution in queuing system with limited resources // Proc. of IX International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics related to modeling of information systems", APTP+MS, 2015. — P. 36–40.
2. *Naumov V., Samouylov K.* Analysis of multi-resource loss system with state-dependent arrival and service rates // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 2017. — Vol. 31, no. 1. — P. 1–7.
3. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. — 1957. — Т. 2, вып. 1 — С. 106–116.
4. *Гнеденко Б. В, Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.

UDC 519.218.31

On the insensitivity conditions of the queuing system with resources stationary distribution to distribution of customer workload volume

E. S. Sopin[*†]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University, Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

[†] *Institute of Informatics Problems, FRC CSC RAS 44-2 Vavilova Str., Moscow, 119333, Russia*

In the paper, we analyze a queuing system with limited resources and state-dependent arrival and service rates. For the considered model, we derive conditions of stationary probabilities insensitivity to distribution of customer workload volume. Under these conditions, stationary distribution depends on only average workload volume.

Keywords: queuing system, limited resources, insensitivity.