УДК 519.218.3

Оптимальная стратегия перестрахования в модели с несколькими рисками в рамках одного договора страхования

А. А. Муромская*

* *Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119234*

Аннотация. В работе рассматривается модель деятельности страховой компании, заключающей договоры страхования, покрывающие сразу несколько различных рисков. К каждому из данных рисков может быть применено перестрахование произвольного типа. Параметры перестрахования при этом могут быть изменены с течением времени. Основная задача компании заключается в нахождении оптимальной стратегии перестрахования, при использовании которой вероятность неразорения была бы максимальна. В работе получено уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, соответствующее указанной задаче, и доказаны существование и единственность решения данного уравнения. Также установлена связь между решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и наибольшей возможной вероятностью неразорения и определен вид оптимальной стратегии перестрахования.

Ключевые слова: комбинированное страхование, перестрахование, вероятность неразорения, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, оптимальное управление.

1. Введение

В настоящее время страхование играет важную роль в жизни общества и является неотъемлемой частью мировой экономики. Для поддержания стабильности работы страховых компаний появляется необходимость изучения различных аспектов их деятельности на основе математических моделей. Так одной из значимых изучаемых характеристик функционирования страховых компаний является вероятность неразорения. Вероятность неразорения (и, соответственно, вероятность разорения) страховых компаний была исследована как в рамках классических моделей риска (см., например, работу [1]), так и в условиях более сложных моделей, согласно которым страховая компания могла использовать различные финансовые инструменты, например, перестрахование. Отдельный интерес представляют модели риска, в рамках которых страховая компания имеет возможность выбирать параметры перестрахования в каждый момент времени, руководствуясь при этом информацией о поступивших ранее убытках. Основной целью компании является тогда поиск оптимальной (в некотором смысле) стратегии перестрахования. В качестве одного из критериев оптимальности стратегии перестрахования может быть выбрана максимальная вероятность неразорения. При этом часто выбор стратегии перестрахования осуществляется из некоторого класса стратегий, задаваемого типом перестрахования. Так Шмидли посвятил статью [2] поиску оптимальной стратегии квотного перестрахования, в то время как Хиппа и Вогта [3] интересовал вопрос о существовании оптимальной перестраховочной стратегии эксцедента убытка. В работе Громова [4] был рассмотрен договор перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. В настоящей же работе исследован более общий случай, а именно, предполагается, что компания заключает договоры страхования, которые покрывают сразу $k \geq 2$ рисков, каждый из которых может быть перестрахован в соответствии со своим произвольным типом перестрахования.

Итак, пусть в каждый момент времени $t \geq 0$ страховая компания имеет возможность выбрать параметры d_t^i перестрахования i-ого риска, руководствуясь при этом значением капитала $X_t^{\overline{d}}$. Таким образом, процесс $\overline{d}_t = (d_t^1, \ldots, d_t^k)$, где $d_t^i = d^i(X_t^{\overline{d}})$ являются измеримыми функциями от капитала компании, определяет стратегию перестрахования. Множества возможных значений параметров перестрахования d_t^i будут обозначаться через D_i, при этом рассматриваются только компактные множества D_i. Соответственно, в каждый фиксированный момент времени $\overline{d}_t \in D$, где $D = D_1 \times \ldots \times D_k$. С помощью $\mathfrak{D}$ будет обозначено множество всех возможных стратегий перестрахования $\overline{d}_t$.

Поступившие требования по каждому из k рисков в рамках одного страхового случая делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом договора перестрахования (функцией ρ_j) и в соответствии с выбранными параметрами перестрахования $d_{T_n-}^j$, $j = \overline{1,k}$. С помощью T_n обозначены моменты поступления совокупных исков. Функции ρ_j определяют тип договора перестрахования, то есть само правило, по которому производится деление требования по j-ому риску между страховщиком и перестраховщиком. Если по j-ому риску поступило требование Y_j и на момент поступления данного требования выбран параметр $d^j \in D_j$, то $\rho_j(Y_j, d^j)$ обозначает часть иска, которую должен покрыть страховщик. Перестраховщик тогда должен покрыть $Y_j - \rho_j(Y_j, d^j)$. В соответствии с типом перестрахования делятся не только требования, но и премии. После применения перестрахования интенсивности поступления премий страховщику по каждому из k рисков становятся равными $c_i(d_t^i)$, $i = \overline{1,k}$.

Итого капитал страховой компании, использующей перестрахование, в момент времени t принимает следующий вид:

$$X_t^{\overline{d}} = x + \int_0^t \sum_{i=1}^{k} c_i(d_s^i)ds - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{k} \rho_j(Y_{nj}, d_{T_n-}^j), \; t \geq 0,$$

где x — это начальный капитал, N_t — пуассоновский процесс с параметром λ, а Y_{nj} — случайные величины, обозначающие размеры требований по j-ому риску в рамках n-ого страхового случая. При этом $\{\overline{Y_n}\}_{n\geq 1} = \{(Y_{n1}, \ldots, Y_{nk})\}_{n\geq 1}$ представляет собой последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов. Компоненты данных векторов $Y_{nj},\ j = \overline{1,k}$, имеют непрерывную совместную функцию распределения $F(y_1, \ldots, y_k)$.

Основная задача компании состоит в том, чтобы выбрать наилучшую стратегию перестрахования, позволяющую максимально увеличить вероятность неразорения. При этом $\tau^{\overline{d}} = \inf[t \geq 0 : X_t^{\overline{d}} < 0]$ является моментом разорения, $\psi^{\overline{d}}(x) = P(\tau^{\overline{d}} < \infty | X_0^{\overline{d}} = x)$ — вероятностью разорения, а $\delta^{\overline{d}}(x) = 1 - \psi^{\overline{d}}(x)$ — вероятностью неразорения страховой компании, использующей стратегию перестрахования $\overline{d}_t$. Таким образом, цель состоит в том, чтобы найти $\delta(x) = \sup_{\overline{d}_t \in \mathfrak{D}} \delta^{\overline{d}}(x)$ и определить оптимальную стратегию перестрахования, если такая существует.

2. Основная часть

В соответствии с методами решения задач стохастического оптимального управления в первую очередь было получено уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\sup_{\overline{d} \in D} \Bigg[\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) g'(x) - \lambda g(x) + \\ + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k) \Bigg] = 0. \quad (1)$$

При этом было введено новое обозначение $g(x)$, так как заранее точно неизвестно, удовлетворяет ли функция $\delta(x)$ уравнению (2) или нет. Связь между решением уравнения (2) и искомой функцией $\delta(x)$ определяется позже, однако, исходя из свойств функции $\delta(x)$, сразу стоит отметить, что интерес представляет существование возрастающих решений $g(x)$ уравнения (2), таких, что $g(0) > 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$. Здесь и далее, когда указываются характеристики функции $g(x)$, такие как, например, монотонность, имеются в виду характеристики данной функции на луче $[0, \infty)$ (определение $g(x)$ на $(-\infty, 0)$ необходимо только для удобства записи интегралов). Несложно показать, что с учетом наложенных на функцию $g(x)$ ограничений уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$g'(x) = \inf_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \left(g(x) - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j)) \; dF(y_1, \ldots, y_k) \right) \right], \quad (2)$$

где $\widetilde{D} = \{\overline{d} \in D : \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) > 0\}$. Далее в качестве граничного условия берется равенство $g(0) = 1$ и в соответствии с выбранным условием удается доказать существование и единственность решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана:

Теорема 1. *Существует единственное решение уравнения* (2)*, такое, что* $g(0) = 1$*. Данное решение является возрастающим, ограниченным и непрерывно дифференцируемым.*

После этого появляется возможность установить связь между решением уравнения (2) и наибольшей возможной вероятностью неразорения и определить вид искомой оптимальной стратегии перестрахования:

Теорема 2. *Пусть* $g(x)$ *— единственное решение уравнения* (2)*, такое, что* $g(0) = 1$*. Тогда* $g(x) = \delta(x)/\delta(0) = \delta(x)g(\infty)$*, при этом оптимальная стратегия перестрахования имеет вид* $\overline{d}_t^* = \overline{d}^*(X_t^{\overline{d}^*})$*, где* $\overline{d}^*(x)$ *— это точка, в которой достигается инфимум в уравнении* (2)*, а* $X_t^{\overline{d}^*}$ *— это процесс капитала страховой компании, использующей оптимальную стратегию перестрахования* $\overline{d}_t^*$*.*

Для частных случаев распределения рисков (например, для случая двух показательно распределенных рисков) вид функции $\delta(x)$ и оптимальной стратегии перестрахования удается получить с помощью численных методов (см. статью [5]).

3. Заключение

В работе была рассмотрена деятельность страховой компании, занимающейся комбинированным страхованием, согласно которому договоры страхования покрывают сразу несколько различных рисков. При этом предполагалось, что каждый из застрахованных рисков мог быть передан в перестрахование произвольного типа, параметры которого изменялись со временем. Была поставлена и решена задача оптимального стохастического управления, заключающаяся в определении максимальной возможной вероятности неразорения и соответствующей ей стратегии перестрахования. Полученные результаты представляют собой логическое продолжение и обобщение исследований, посвященных поиску оптимальных стратегий перестрахования в моделях с фиксированным типом договора перестрахования и одним риском в рамках одного договора страхования.

Литература

1. *Cai J.* Cramer–Lundberg Asymptotics // Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. — 2014. — P. 1–6.
2. *Schmidli H.* Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting // Scandinavian Actuarial Journal. — 2001. — Vol. 2001, no. 1. — P. 55–68.
3. *Hipp C., Vogt M.* Optimal dynamic XL reinsurance // ASTIN Bulletin. — 2003. — Vol. 33, no. 2. — P. 193–207.
4. *Громов А. Н.* Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убытка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2011. — No. 4. — С. 17–22.
5. *Муромская А. А.* Оптимальное перестрахование в модели со страхованием нескольких рисков в рамках одного договора // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2016. — No. 4. — С. 79–97.

UDC 519.218.3

Optimal reinsurance strategy in the model with several risks within one insurance policy

A. A. Muromskaya[*]

[*] *Department of Probability Theory,*
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, Russia, 119234

We study the model of insurance company performance that issues insurance policies covering several risks. Each risk can be reinsured according to the arbitrary reinsurance treaty. Parameters of such reinsurance treaties can be changed dynamically. The main aim is to find an optimal reinsurance strategy that maximizes the probability of survival of the insurance company. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation for this problem is deduced and existence and uniqueness of its solution are proved. We also establish a connection between the solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation and the greatest possible probability of survival and determine the optimal reinsurance strategy.

Keywords: multiple peril insurance, reinsurance, survival probability, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, optimal control.