УДК 519.21

Интегральное представление переходных вероятностей марковского процесса многомерной эпидемии Вейса

А. В. Мастихин*

* *Кафедра высшей математики,*
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., д.5, Москва, Россия, 105005

Аннотация. В докладе обсуждаются некоторые результаты, полученные при обобщении марковского процесса простой эпидемии.

Ключевые слова: марковский процесс эпидемии,экспоненциальная производящая функция, точное решение.

1. Определение марковского процесса эпидемии

На множестве состояний $N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ \alpha_i = 0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)), t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями

$$P_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}.$$

Пусть при $t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид $(\mu_1 > 0, \rho_1 > 0, \dots,\ \mu_n > 0, \rho_n > 0)$

$$\begin{aligned}
&P_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n-1)}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(t) = (\mu_1\alpha_1\alpha_n + \dots + \mu_n\alpha_{n-1}\alpha_n)t + o(t),\\
&P_{(\alpha_1-1,\alpha_2,\alpha_3)}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(t) = \rho_1\alpha_1 t + o(t),\\
&\dots\\
&P_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}-1,\alpha_n)}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n)}(t) = \rho_{n-1}\alpha_{n-1}t + o(t),\\
&P_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}^{(\alpha_1,\ T_1\to 0,\alpha_n)}(t) = 1 - \big(\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j(\alpha_j\alpha_n + \rho_j\alpha_j)\big)t + o(t).
\end{aligned}$$

Марковский процесс $\xi(t)$ интерпретируется как модель одновременного распространения $n-1$ типа эпидемий (с разными интенсивностями взаимодействия между восприимчивыми особями и переносчиками). В популяции имеются n типов особей (частиц), $n-1$ из которых являются переносчиками инфекции. Частицы типа $T_1, \ldots, T_{n-1}$— зараженные особи (переносчики инфекции), частицы типа T_n — здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие контактов с зараженными). Состояние процесса $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ означает наличие α_1 частиц типа $T_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ частиц типа T_{n-1} и α_n частиц типа T_n. Через случайное время τ_α^i, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^i < t\} = 1 - e^{-\alpha_i \alpha_n \mu_i t}$, пара частиц типа T_i и типа T_n взаимодействует и превращается в частицу типа T_i. Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_i, \ldots, \alpha_n - 1)$, кроме того, через случайное время τ_α^{n+i-1}, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^n < t\} = 1 - e^{-\alpha_1 \rho_1 t}$, частица типа T_1 умирает и процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_n)$; $i = 1, 2, \ldots n-1$. Случайные величины $\tau_\alpha^1, \ldots, \tau_\alpha^{2n-2}$ независимы, в состоянии $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^1, \ldots, \tau_\alpha^{2n-2}\}$. Далее следует аналогичная эволюция процесса. Схема взаимодействий:

$$T_1 + T_n \to T_1,\ T_1 \to 0, \quad \ldots, T_{n-1} + T_n \to T_{n-1}, \quad T_{n-1} \to 0.$$

Процесс является естественным обобщением марковского процесса (простой) эпидемии Вейса [1], рассматривавшейся, например, в [2], [3], [4].

2. Замкнутое решение системы уравнений Колмогорова

Для экспоненциальной производящей функции $\mathcal{F}(t; z; s)$

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \sum_{\beta_1, \ldots, \beta_n = 0}^{\infty} P_{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}(t) s_1^{\beta_1} \ldots s_n^{\beta_n}$$

первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)$ записываются в виде системы уравнений в частных производных ([2])

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n-1} \Big[\mu_j z_j z_n \Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_j \partial z_n}\Big) + \rho_j z_j \Big(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_j}\Big)\Big],$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n-1} \Big[\mu_j (s_j - s_j s_n) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_j \partial s_j} + \rho_j (1 - s_j) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_j}\Big],$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, \ldots, z_n; s_1, \ldots, s_n) = e^{z_1 s_1 + \cdots + z_n s_n}$.

Т е о р е м а . *Для марковского процесса $\xi(t)$ двойная производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\Big\{\sum_{j=1}^{n-1} z_j s_j e^{-(\mu_j x + \rho_j)t} + z_n\Big\} \Big[e^{z_n (s_n - 1) e^{-y}} +$$

$$
+\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty e^{-v_j+z_n(s_n-1)e^{-y-\frac{\mu_j}{\rho_j}u}}\sqrt{\frac{z_j}{v_j}(1-e^{-(\mu_j x+\rho_j)t})}\times
$$

$$
\times I_1\big(2\sqrt{z_j v_j(1-e^{-(\mu_j x+\rho_j)t})}\big)dv_j+
$$

$$
+\int_0^\infty dv_1\ldots\int_0^\infty dv_{n-1}\exp\Big\{-\sum_{j=1}^{n-1}v_j+z_n(s_n-1)e^{-y}\prod_{j=1}^{n-1}e^{-\frac{\mu_j}{\rho_j}v_j}\Big\}\times
$$

$$
\times\prod_{j=1}^{n-1}\sqrt{\frac{z_j}{v_j}(1-e^{-(\mu_j x+\rho_j)t})}I_1\big(2\sqrt{z_j v_j(1-e^{-(\mu_j x+\rho_j)t})}\big)\Big]\times
$$

$$
\times H(x,y)dxdy,
$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуль, ${}_0F_2(1,1;z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция, $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя и

$$
H(x,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux})J_0(2\sqrt{vy})\ {}_0F_2(1,1;-uv)\,dudv.
$$

3. Заключение

Очертим некоторые приложения данной выше теоремы. Из определения экспоненциальной производящей функции получаем (разлагая в ряд) выражения для переходных вероятностей и числовые характеристики марковского процесса. Далее, переходя к пределу при $t\to\infty$, вычислена производящая функция финальных вероятностей для поглощающих состояний $(0,\ldots,0,\gamma_n)$ и явные выражения для финальных вероятностей. При $\alpha_n\to\infty$ методом характеристических функций получена предельная теорема для финальных вероятностей процесса многомерной эпидемии Вейса.

Литература

1. *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries // Biometrics. — 1965. — Vol. 21, no. 2. — P. 481–490.
2. *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук. — 2002. — Т. 57, вып. 2. — С. 23–84.
3. *Мастихин А.В.* Финальные вероятности марковского процесса эпидемии Беккера // Теория вероятностей и ее применения. — 2011. — Т. 56, вып. 3. — С. 606–614.
4. *Kalinkin A.V., Mastikhin A.V.* A limit theorem for a Weiss epidemic // J. Appl. Probab. — 2015. — Vol. 52, no. 1 — P. 247–257.

UDC 519.21

Integral representation of transition probabilities for Weiss multidimentional epidemic process

A. V. Mastikhin*

* *Department of Higher Mathematics,*
Bauman Moscow State Technical University,
2-nd Baumanskaya str., 5, Moscow, 105005, Russia

For Markov multidimensional death-process of a special class we consider the use of Fourier methods to obtain an exact solution of Kolmogorov equations for the exponential (double) generating function of transition probabilities. We obtain integral representation for the generating function of transition probabilities, using special functions.

Keywords: Markov epidemic process; transition probabilities; equations for exponential generating function; closed solution.