УДК 519.218.4, 519.873

Простая оценка скорости сходимости распределения системы $M|G|\infty$

Г. А. Зверкина[*,†]

[*] *Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ) ул. Образцова, д.9 стр.9, Москва, Россия, 127994*

[†] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН ул. Профсоюзная, д. 65, Москва, 117997, Россия*

Аннотация. Представлен простой способ получения степенной оценки скорости сходимости распределения стандартной и обобщённой системы Эрланга-Севастьянова $M|G|\infty$. Обсуждается вопрос об улучшении таких оценок.

Ключевые слова: система Эрланга-Севастьянова, скорость сходимости, строгие оценки, стационарное распределение, метрика полной вариации.

1. Система $M|G|\infty$

Рассматривается СМО $M|G|\infty$, где (a) входящий поток заявок – пуассоновский с параметром λ; ($б$) время обслуживания заявок – неотрицательная сл.в. χ_i с ф.р. $G(s)$, и $0 < M_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\,\chi^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha \geqslant 2$; ($в$) при поступлении в СМО заявки немедленно начинают обслуживаться; ($г$) все времена обслуживания и входящий поток независимы. Поведение $M|G|\infty$ описываем марковским процессом X_t с пространством состояний (п.с.) $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k$, где $\mathcal{S}_0 = \{0\}$, а при $k > 0$, $\mathcal{S}_k = \mathbb{R}_+^k$. Если в момент t СМО свободна (число заявок в СМО $=0$), то $X_t \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Если в СМО есть $k > 0$ заявок, то $X_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \ldots, x_t^{(k)}\}$, где $x_t^{(\ell)}$ – это время обслуживания ℓ-й заявки до момента t. *Далее предполагаем, что* $X_0 = 0$.

X_t – регенерирующий процесс. Периоды регенерации состоят из двух *независимых* частей: свободные периоды ξ_i ($X_t \in \mathcal{S}_0$) с ф.р. $F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$, и периоды занятости (п.з.) ζ_i ($X_t \notin \mathcal{S}_0$) с ф.р. $B(s)$. Т.е. есть последовательность $\{t_i\}_{i\geqslant 0}$ ($t_0 = 0$, $t_i > t_{i-1}$) такая, что $X_{t_{2k}-0} \neq 0$, $X_{t_{2k}+0} = 0$, $X_{t_{2k+1}} = 0$, $X_{t_{2k+1}} \neq 0$ ($k \geqslant 0$). При $\mathbb{E}(\xi_i + \zeta_i) < \infty$ X_t эргодичен, его распределение $\mathcal{P}_t$ ($\mathcal{P}_t(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{X_t \in A\}$) слабо сходится к распределению $\mathcal{P}$ при $t \to \infty$. Мы хотим найти *строгие* оценки скорости сходимости $\mathcal{P}_t$ к $\mathcal{P}$ в метрике полной вариации. *Известно, что при* $X_0 = 0$

$$P_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{X_t \in \mathcal{S}_k\} = \frac{\mathfrak{G}(t)^k e^{-\mathfrak{G}(t)}}{k!}, \tag{1}$$

Работа поддержана РФФИ, проект No 17-01-00633 А.
Автор выражает глубокую признательность А.Ю.Веретенникову, некоторые идеи которого, высказанные в личных беседах, были использованы в этой работе.

где $\mathfrak{G}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\int\limits_0^t (1-G(s))\,\mathrm{d}s$*; при* $M_1 < \infty$ $\quad \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = \frac{\rho^k e^{-\rho}}{k!}$, *где* $\rho = \mathfrak{G}(+\infty)$. *Также, если* $M_1 < \infty$, *то* $B(s) = 1 - \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} c^{n*}(s)$, *где* $c^{n*}(s)$ *– n-я свёртка функций* $c(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(1-G(s))e^{-\mathfrak{G}(s)}$ *– см. [3], [5].* $\triangleright$

Предложение 1. *Если* $M_\alpha < \infty$ *для некоторого* $\alpha \geqslant 1$, *то:*

$$1.\ \mathbb{E}\,\zeta = \frac{e^\rho - 1}{\lambda}; \qquad 2.\ \mathbb{E}\,\zeta^\alpha \leqslant \mathbb{E}\,\chi^\alpha \times \frac{e^{2\rho}}{\alpha} \text{ при } \alpha > 1 \text{ и } \rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda M_1. \quad \triangleright \tag{2}$$

Предложение 2. *Если* $\mathbb{E}\,\chi^\alpha = M_\alpha < \infty$ *для* $\alpha > 2$, *то* $\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|_{TV} \leqslant t^{-\kappa}(C_1(\varrho,\kappa)\frac{\varrho M_{\kappa+1} e^{2\rho}\lambda}{(\kappa+1)^2(e^\rho-1)}) + C_2(\varrho,\kappa)(\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\lambda^\kappa} + M_\kappa)$ *для всех* $\kappa \in [1, \alpha-1]$; *здесь* $C_1(s,n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} s^i(2i+1)^n$, $C_2(s,n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} i s^i (2i+1)^n$. $\triangleright$

Доказательство. Рассмотрим два независимых процесса: X_t с $X_0 = 0$, и $X_t^{(1)}$ с той же переходной функцией, но $X_0^{(1)} \in \mathcal{X}$. Пусть $\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : X_t^{(1)} = 0\}$, $\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \theta_0 : X_t^{(1)} = 0\}$, $\theta_{2k-1} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \theta_{2k-2} : X_t^{(1)} \neq 0\}$, $\theta_{2k} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \theta_{2k-2} : X_t^{(1)} = 0\}$ $(k \in \mathbb{N})$. $\mathbb{P}\{X_{\theta_k} = 0\} = e^{-\mathfrak{G}(\theta_k)} \geqslant e^{-\rho}$ (см. (1)). Процессы X_t и $X_t^{(1)}$ содержат вложенные альтернирующие процессы восстановления с моментами восстановления t_i и θ_i соответственно. Опишем их поведение процессами: $\{R_t \stackrel{\text{def}}{=} 0$ при $t \in [t_{2k}, t_{2k+1})$, и $R_t \stackrel{\text{def}}{=} (1, t - t_{2k})$ при $t \in [t_{2k-1}, t_{2k})\}$; $\{\widehat{R}_t \stackrel{\text{def}}{=} 0$ при $t \in [\theta_{2k}, \theta_{2k+1})$, и $\widehat{R}_t \stackrel{\text{def}}{=} (1, t - \theta_{2k})$ при $t \in [\theta_{2k-1}, \theta_{2k})\}$. Процессы R_t и $\widehat{R}_t$ – марковские, с п.с. $\mathcal{X}' \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \mathbb{R}_+$. Распределение R_t и $\widehat{R}_t$ в момент t определяет распределения X_t и $X_t^{(1)}$. По Предложению 1, $\mathbb{E}\,\zeta < \infty$, и распределение R_t сходится к распределению $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}(0) = e^{-\rho}$, $\mathcal{R}(S) = (1 - e^{-\rho})\int\limits_S \frac{1 - B(u)}{\mathbb{E}\,\zeta}\,\mathrm{d}u$ для $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\tau(X_0^{(1)}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 :\ X_t = X_t^{(1)} = 0\}$ и $\tau'(\widehat{R}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 :\ R_t = \widehat{R}_t = 0\}$. Тогда $\tau(X_0^{(1)}) = \tau'(\widehat{R}_0)$. $\tau(X_0^{(1)}) = \tau'(\widehat{R}_0) = 0$ при $X_0^{(1)} = 0$. $\mathbb{P}\{\tau(X_0^{(1)}) > \theta_{2k}\} \leqslant \prod\limits_{i=0}^{k}(1 - e^{-\mathfrak{G}(\theta_{2i})}) \leqslant (1 - e^{-\rho})^{k+1} = \varrho^{k+1}$ при $X_0^{(1)} \neq 0$. Поэтому для всех $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ можно применять *основное неравенство склеивания* (см. [2]) и неравенство Маркова:

$$|\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X_t^{(1)} \in S\}| \leqslant \mathbb{P}\{\tau(X_0^{(1)}) > t\} = \frac{\mathbb{E}\,(\tau'(X_0^{(1)}))^\alpha}{t^\alpha}. \tag{3}$$

Из неравенства $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^\kappa \leqslant \max(1, n^{\kappa-1})\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^\kappa$ для $a_i \geqslant 0$, $\kappa \geqslant 0$ имеем при $\kappa \in [1, \alpha]$: $\mathbb{E}\,(\tau(X_0^{(1)}))^\kappa \leqslant \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varrho^i \mathbb{E}\,(\theta_i)^\kappa \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i (2i+1)^{\kappa-1}(\mathbb{E}\,(\theta_0)^\kappa + i(\mathbb{E}\,(\xi)^\kappa) + \mathbb{E}\,(\chi)^\kappa)) = \tag{4}$$

$$= \mathfrak{C}(\kappa, X_0^{(1)}) \stackrel{\text{def}}{=} C_1(\varrho,\kappa)\mathbb{E}\,(\theta_0)^\kappa + C_2(\varrho,\kappa)(\mathbb{E}\,(\xi)^\kappa) + \mathbb{E}\,(\chi)^\kappa).$$

Из (3) и (4) следует: $|\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X_t^{(1)} \in S\}| \leqslant \frac{\mathfrak{C}(\kappa, X_0^{(1)})}{t^\kappa}$ для всех $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. И $|\mathcal{P}_t(S) - \mathcal{P}(S)| \leqslant \int\limits_{\mathcal{X}} \frac{\mathfrak{C}(\kappa, X_0^{(1)})}{t^\kappa} \mathcal{P}(\,\mathrm{d}X_0^{(1)}) = \int\limits_{\mathcal{X}'} \frac{\mathfrak{C}(\kappa, \widehat{R}_0)}{t^\kappa} \mathcal{R}(\,\mathrm{d}\widehat{R}_0)$; $\int\limits_{\mathcal{X}'} \mathfrak{C}(\kappa, \widehat{R}_0)\mathcal{R}(\,\mathrm{d}\widehat{R}_0) = C_2(\varrho,\kappa)(\mathbb{E}\,(\xi)^\kappa) + \mathbb{E}\,(\chi)^\kappa) + C_1 e^{-\rho} \times 0 + C_1(\varrho,\kappa)(1 - e^{-\rho}) \int\limits_0^\infty u^\kappa \frac{1-B(u)}{\mathbb{E}\,\zeta}\,\mathrm{d}u = C_2(\varrho,\kappa)(\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\lambda^\kappa} + \mathbb{E}\,(\chi)^\kappa) + C_1(\varrho,\kappa)\frac{(1-e^{-\rho})\mathbb{E}\,\zeta^{\kappa+1}}{(\kappa+1)\mathbb{E}\,\zeta}$, и, применяя оценки (2), получаем утверждение Предложения 2. □

2. Обобщённая система Эрланга-Севастьянова

В [4] и др. исследовалась обобщённая СМО Эрланга-Севастьянова, где интенсивности входящего потока и обслуживания измеримы и зависят от состояния СМО, которое определяется в момент t как вектор $X_t = (x_t^{(0)}; x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \ldots, x_t^{(n_t)})$, где $x_t^{(0)}$ – время от последнего поступления заявки до момента t, n_t – число находящихся на обслуживании в момент t заявок, $x_t^{(i)}$ – время, прошедшее с момента поступления i-й находящейся на обслуживании заявки. Интенсивность входящего потока $\lambda = \lambda(x_t)$, интенсивность обслуживания находящейся в СМО i-й заявки $h_i = h_i(X_t)$. Т.е. за время $(t, t+\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$) СМО перейдёт из состояния x_t в состояние $X_{t+\varepsilon} = (x_t^{(0)} + \varepsilon, x_t^{(1)} + \varepsilon, x_t^{(2)} + \varepsilon, \ldots, x_t^{(n_t)} + \varepsilon)$ с вероятностью $1 - (\lambda(X_t) + \sum\limits_{i=1}^{n_t} h_i(X_t))\varepsilon + o(\varepsilon)$, с вероятностью $\lambda(X_t)\varepsilon + o(\varepsilon)$ в СМО поступит новая заявка, и с вероятностью $h_i(X_t)\varepsilon + o(\varepsilon)$ i-я заявка покинет СМО. Процесс X_t – марковский с п. с. $\mathcal{X}^{(0)} = \bigcup\limits_{i=0}^\infty \mathcal{S}_i$, где $\mathcal{S}_i = \mathbb{R}_+^{i+1}$, он описывает поведение СМО **Q0**. Предположим:

$$\begin{aligned} &1.\ 0 < \lambda_0 \leqslant \lambda(X) \leqslant \Lambda_0 < \infty \textit{ для любых } X \in \mathcal{X}_0;\\ &2.\ h_k(X) \geqslant \frac{C}{1+x^{(k)}} \textit{ для любых } X \in \bigcup_{i=k}^\infty \mathcal{S}_k \textit{ при некотором } C > 2. \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим ζ_i – i-й п.з. X_t; $\overline{M}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{(1+u)^C}\,\mathrm{d}u = \mathbb{E}\,\overline{\chi}^\alpha$, где $\mathbb{P}\{\overline{\chi} \leqslant s\} = \Phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{(1+s)^C}$, $\overline{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(C+1)^{-1}$; $\overline{\varrho} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - (\frac{\lambda_0}{\Lambda})^2 e^{-\overline{\rho}}$.

Предложение 3. *В условиях* (5) $\mathbb{E}\,\zeta \leqslant \frac{e^{\overline{\rho}}-1}{\Lambda}$; $\mathbb{P}\{n_t = 0\} \geqslant e^{-\overline{\rho}}$; *и* $\mathbb{E}\,\zeta^\kappa \leqslant \frac{\mathbb{E}\,\overline{\chi}^\kappa}{\kappa} e^{2\overline{\rho}}$ *при* $\kappa \in (0, C)$. ▷

Доказательство (схема). 1.Ф.р. χ_i – времени обслуживания i-й заявки – $F_i(s) = 1 - \exp(\int\limits_0^s h_u(\cdot)\,\mathrm{d}u) \geqslant \Phi(s)$. Т.е. сл.в. $\overline{\chi}_i$ *по распределению* больше сл.в. $\overline{\chi}$: $\chi_i \prec \overline{\chi}$.

2. Рассмотрим СМО **Q1**, где заявкам при поступлении приписан параметр $\upsilon \in \{1,2\}$; состояние СМО – это вектор $X_t^{(1)} = (x_t^{(0,1)}, x_t^{(0,2)}; x_t^{(1)}, \upsilon_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \upsilon_t^{(2)}, \ldots, x_t^{(n_t)}, \upsilon_t^{(n_t)})$, где $x_t^{(0,i)}$ – время от последнего прихода заявки из i-го потока, $x_t^{(j)}$ и $\upsilon_t^{(j)}$ – обслуженное время j-й заявки и его параметр. Входящий поток **Q1** – сумма двух потоков, 1-й с интенсивностью$\lambda(X_t^{(1)})$, а 2-й – $\widehat{\lambda}(X_t^{(1)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Lambda_0 - \lambda(X_t^{(1)})$; параметр заявки – номер её потока; время обслуживания 2-го потока имеет ф.р. $\Phi(s)$ и не зависит от $X_t^{(1)}$. П.с. $X_t^{(1)}$ – это $\mathcal{X}^{(1)} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (\mathbb{R}_+^{2+i} \times \{1,2\}^i)$. Интенсивность обслуживания заявок 1-го потока $h_k(X_t^{(1)})$ и интенсивность $\lambda(X_t^{(1)})$, зависит от $\hat{X}_t = (x_t^{(0,1)}; x_t^{(0)} \times (2-\upsilon_t^{(0)}), x_t^{(1)} \times (2-\upsilon_t^{(1)}), x_t^{(2)} \times (2-\upsilon_t^{(2)}), \ldots, x_t^{(n_t)} \times (2-\upsilon_t^{(n)}))$, т.е. только от заявок 1-го потока. Условия (5) выполнены. СМО **Q1** – это СМО **Q0** с добавочным потоком заявок, и сумма потоков имеет интенсивность Λ_0, а поведение **Q0** – прежнее. П.з. $\zeta^{(1)}$ **Q1** не менее п.з. ζ **Q0** *потраекторно*: $\zeta^{(1)} \succ \zeta$.

3. Заменим в СМО **Q1** времена обслуживания заявок из первого потока на независимые сл.в. с ф.р. $\Phi(s)$. П.з. $\zeta^{(2)}$ полученной СМО **Q2** потраекторно не менее ζ; $\zeta^{(2)} \succ \zeta$, т.е. ф.р. $B^{(2)}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{P}\{\zeta^{(2)} \leqslant s\} \leqslant B_i(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{P}\{\zeta_i \leqslant s\}$, отсюда выводятся утверждения Предложения 3. $\square$

Пусть $\mathcal{P}_t$ – распределение X_t. Процесс X_t – регенерирующий, его моменты регенерации ϑ_i – моменты перехода **Q0** из $\mathcal{S}_0$ в $\mathcal{S}_1$; $X_{\vartheta_i} = (0;0)$. Т.к. $\forall \alpha \in [1, C)$ (см. (5)) $\mathbb{E}\,\zeta_i^\alpha < \infty$, X_t эргодичен и $\mathcal{P}_t \Rightarrow \mathcal{P}$.

Предложение 4. *В условиях* (5) *для всех* $\kappa \in [1, C-1)$ *верно:*
$\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|_{TV} \leqslant t^{-\alpha}((C_1(\overline{\varrho}, \kappa)\frac{\overline{\varrho}\,\overline{M}_{\kappa+1} e^{2\overline{\rho}}\Lambda}{(\kappa+1)^2(e^{\overline{\rho}}-1)}) + C_2(\overline{\varrho}, \kappa)(\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\lambda_0^\kappa} + \overline{M}_\kappa))$. $\quad\triangleright$

Доказательство (схема). 1. Входящий поток СМО **Q0** – сумма двух потоков: fl с интенсивностью λ_0, и Fl_t с интенсивностью $\lambda'(X_t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda(X_t) - \lambda_0 \geqslant 0$. В *зависимых* СМО $\mathbf{Q}'$ и $\mathbf{Q}''$ – в первой поток fl_0, а во второй – Fl_t; $\lambda'(X_t) = \lambda'(\widetilde{X}_t)$, вектор $\widetilde{X}_t = (X_t'; X_t'')$ составлен из X_t' и X_t'' – векторов состояний $\mathbf{Q}'$ и $\mathbf{Q}''$. $X_t' = 0$, если $\mathbf{Q}'$ свободна; $X_t' = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \ldots, y_t^{(n_t')})$, $y_t^{(i)}$ – обслуженное время i-й заявки в $\mathbf{Q}'$ из n_t' заявок в $\mathbf{Q}'$ – если $\mathbf{Q}'$ занята. $X_t'' = (z_t^{(0)}; z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(n_t'')})$, $z_t^{(0)}$ – время от последнего поступления заявки из потока $fl_0 + Fl_t$ до момента t, а $z_t^{(i)}$ – обслуженное время i-й заявки в $\mathbf{Q}''$ из n_t'' заявок в $\mathbf{Q}''$ (если $n_t'' = 0$, то X_t'' однокомпонентный). Всего заявок в $\mathbf{Q}'$ и $\mathbf{Q}''$ –

$n_t = n'_t + n''_t$. П. с. $\widetilde{X}_t$ – $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times \mathcal{X}^{(0)}$. Точкам регенерации X_t соответствуют точки ϑ_i, когда $\widetilde{X}_{\vartheta_i} = ((0;0);(0))$ или $\widetilde{X}_{\vartheta_i} = (0;(0;0))$. Вектор $\widetilde{X}_t$ определяет вектор X_t. $\mathbb{P}\{$следующая заявка поступит в $\mathbf{Q}' + \mathbf{Q}''$ из потока $fl_0\} \geqslant p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\Lambda}{\lambda_0}$.

2. Пусть $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{X}_t^{(1)}$ независимы, $\widetilde{X}_0 = (0;(0))$ и $\widetilde{X}_0^{(1)} \in \widetilde{\mathcal{X}}$; пусть $n_t^{(1)}$ – число заявок в СМО процесса $\widetilde{X}_t^{(1)}$. Пусть $\tau(\widetilde{X}_0^{(1)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{t \geqslant 0 : \widetilde{X}_t = \widetilde{X}_t^{(0)} = ((0;0);(0))\}$; $\eta_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{t \geqslant 0 : n_t^{(1)} = 0\}$ (1-е окончание п.з.), $\eta'_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{t > \eta_{i-1} : n_t^{(1)} > 0\}$ (начало i-го п.з.), $\eta_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{t \geqslant \eta'_i : n_t^{(1)} = 0\}$ (окончание i-го п.з.). $\mathbb{P}\{n_{\eta_i} = 0\} \geqslant e^{-\overline{\rho}}$. Если в момент η_i обе СМО свободны, то соответствующие подсистемы $\mathbf{Q}'$ и $\mathbf{Q}'^{(1)}$ совпали (${X'_{\eta_i}}^{(1)} = X'_{\eta_i} = 0$). $\mathbb{P}\{$Следующие заявки придут в обе СМО из потоков fl_0 и $fl_0^{(1)}\} \geqslant p^2$, и поэтому в конце каждого периода регенерации $\widetilde{X}_t^{(1)}$ с вероятностью большей чем $p^2 e^{-\overline{\rho}}$ состояния процессов совпадут. Затем Предложение 4 доказывается как Предложение 2. $\square$

Замечание. Найденные оценки неоптимальны. Их можно улучшить методом *успешного склеивания* – см. [1]. $\triangleright$

Литература

1. *Griffeath D.* A maximal coupling for Markov chains // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. — 1975. — Vol. 31, no. 2. — P. 95–106.
2. *Lindvall T.* Lectures on the Coupling Method. — Wiley, New York, 1992.
3. *Takács L.* On Erlang's Formula // Ann. Math. Statist. — 1969. — Vol. 40, no. 1. — P. 71-78.
4. *Veretennikov A. Yu.* On the rate of convergence for infinite server Erlang-Sevastyanov's problem // Queueing Systems. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 181–203.
5. *Stadje, W.* The busy period of the queueing system $M|G|\infty$ // Journal of Applied Probability. — 1985. — Vol. 22. — P. 697–704.

UDC 519.218.4, 519.873

Simple bounds for the convergence rate of $M|G|\infty$ queueing system

G. A. Zverkina[*†]

[*] *Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)*
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia
[†] *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences*
65 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia

A simple approach for obtaining strong polynomial bounds for the convergence rate of the standard Erlang-Sevastyanov $M|G|\infty$ queueing system described. This approach can be extended to the generalized Erlang-Sevastyanov system. Also the way how these estimates can be improved is discussed.

Keywords: Erlang-Sevastyanov queueing system, convergence rate, strong bounds, stationary distribution, total variation metric.