УДК 519.217.2

Критерий эргодичности для марковских цепей, описывающих эволюцию случайных слов

А. А. Замятин[*], О. В. Машников[*]

[*] *Кафедра теории вероятностей,*
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119991

Аннотация. Мы рассматриваем счетные марковские цепи с дискретным временем на множестве слов. Иначе говоря, состояния цепи - упорядоченные последовательности символов (из некоторого алфавита) произвольной длины. В рассматриваемом случае алфавит является счетным множеством. Динамика цепи определяется с помощью случайной грамматики определенного типа. В каждый момент времени мы можем изменять один из концов последовательности, определяющей состояние цепи, при помощи заданного набора подстановок, каждая из которых осуществляется с определенной вероятностью. Нашей целью является доказательство критерия эргодичности для таких цепей.

Ключевые слова: марковская цепь, эргодичность, функция Ляпунова, критерий Фостера.

1. Введение

Рассмотрим однородную цепь Маркова $\mathcal{A}$ с дискретным временем и счетным числом состояний

$$\Omega = \cup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, ..., k, ..\}$$

Состояния марковской цепи $\mathcal{A}$ - это упорядоченные последовательности или слова $\alpha = i_n \dots i_1$ произвольной длины $n(\alpha) = |\alpha|$, где $i_s \in \mathbb{N}$. Для любых двух слов $\alpha = i_p \dots i_1$ и $\beta = j_q \dots j_1$ введем их конкатенацию (склейку) следующим образом

$$\beta\alpha = j_q \dots j_1 i_p \dots i_1$$

Обозначим через $\emptyset$ пустое слово длины 0.

Предположим, что переходные вероятности $p_{\alpha,\beta}$ марковской цепи $\mathcal{A}$ удовлетворяют следующим условиям:

— $(C1)$ Возможные переходы в цепи Маркова устроены следующим образом. Мы можем удалить крайний левый символ в слове и вместо него подставить произвольное слово, состоящее не более, чем из 2-ух символов. Пусть $\alpha = i\rho$ и $\beta = \theta\rho$, где $|\theta| \le 2$ и ρ-произвольное слово. Вероятность перехода $p_{\alpha,\beta}$ не зависит от ρ, а зависит только от i и θ. Обозначим эту вероятность через $q(i, \theta)$:

$$p_{i\rho,\theta\rho} = q(i, \theta)$$

В частности, если $\theta = \emptyset$, то с вероятностью $q(i, \emptyset)$ удаляется символ i и длина слова уменьшается на 1.

— $(C2)$ Существует такое $K \in \mathbb{N}$, что вероятности $q(i, \theta) > 0$ для всех i и для всех $|\theta| \leq 2 : \theta = \emptyset$, $\theta = j_1$, $\theta = j_2 j_1$ при условии, что $|j_2 - i| \leq K$, $|j_1 - i| \leq K$. Также предположим, что для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ переходная вероятность $p_{\emptyset, j_0} > 0$.

— $(C3)$ Вероятности $q(i, \theta) = 0$ для всех i и для всех θ таких, что $1 \leq |\theta| \leq 2$, где $\theta = j_1$, $\theta = j_2 j_1$, при условии, что либо $|j_2 - i| > K$, либо $|j_1 - i| > K$.

— $(C4)$ Вероятность $q(i, \emptyset) \to 1$ при $i \to \infty$.

Поскольку сумма переходных вероятностей равна 1, то для любого $i \in \mathbb{N}$

$$q(i, \emptyset) + \sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j) + \sum_{j,k \in \mathbb{N}} q(i, jk) = 1 \tag{1}$$

Впервые такие марковские цепи были изучены в статье [1], где рассматривался случай конечного алфавита. В нашем случае он счетный - множество натуральных чисел.

Нашей целью является доказательство критерия эргодичности для марковской цепи $\mathcal{A}$.

Отметим, что условие $(C2)$ обеспечивает неприводимость и апериодичность цепи $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\alpha(t) \in \Omega$ состояние марковской цепи в момент времени t. Пусть τ_i первый момент времени, когда длина струны уменьшится на 1 при условии, что в начальный момент времени на левом конце слова стоял символ i :

$$\tau_i = \min\{t : |\alpha(t)| < |i\rho| | \alpha(0) = i\rho\}$$

Предположим, что цепь эргодична. Тогда математические ожидания $E_i = E\tau_i < \infty$ конечны и удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$E_i = q(i, \emptyset) + \sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j)(1 + E_j) + \sum_{j,k \in \mathbb{N}} q(i, jk)(1 + E_j + E_k) =$$

$$= 1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j) E_j + \sum_{j,k \in \mathbb{N}} q(i, jk)(E_j + E_k)$$

Запишем эту систему в матричном виде

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{1} + A\overrightarrow{E}$$

где $\overrightarrow{E} = (E_i, i \in \mathbb{N})$ и $\overrightarrow{1}$ - вектор, состоящий из единиц.

Выпишем в явном виде элементы матрицы $A = \{a_{ij},\, i, j \in \mathbb{N}\}$

$$a_{ij} = q(i,j) + \sum_{k\in\mathbb{N}} (q(i,jk) + q(i,kj))$$

Из условия $(C2)$ вытекает, что матрица A неприводима: для любой пары индексов (i,k) найдется такое натуральное $N = N(i,k)$, что при любом $n > N$, $a_{ik}^{(n)} > 0$, где $a_{ik}^{(n)}$ элементы матрицы A^n.

Отметим, что при выполнении условия $(C3)$ матрица A обладает свойством:

$$a_{i,i+l} = 0,\ |l| > K \tag{2}$$

Из этого свойства и равномерной ограниченности элементов a_{ij} следует, что матрица A определяет ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве l_2, состоящем из вещественнозначных последовательностей $f = \{f_k\}, k \in \mathbb{N}$ таких, что $\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k|^2 < \infty$. Линейный оператор, соответствующий матрице A, определяется стандартным способом

$$(Af)_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} f_j$$

и обозначается так же, как матрица.

Лемма 1 *Пусть выполнено условие $(C3)$. Оператор A является компактным тогда и только тогда, когда выполнено условие $(C4)$.*

Утверждение леммы следует из (2) и того факта, что

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}} q(i,j) + 2\sum_{j,k\in\mathbb{N}} q(i,jk) < 2\,(1 - q(i,\emptyset))$$

где последнее равенство является следствием (1).

2. Основные результаты

В статье [2] теория Перрона-Фробениуса для конечных матриц была обобщена на случай компактных операторов. В частности, был доказан следующий результат.

Теорема 1 *Пусть A - компактный линейный оператор в гильбертовом пространстве l_2 такой, что матрица оператора неприводима и состоит из неотрицательных элементов. Тогда существует положительное собственное значение λ, максимальное по модулю среди всех собственных значений A. Собственному значению λ отвечает собственный вектор $g = (g_i,\ i \in \mathbb{N}) \in l_2$, где все координаты $g_i > 0$: $Ag = \lambda g$. Собственный вектор g определяется однозначно с точностью до умножения на константу.*

Сформулируем основной результат.

Теорема 2 *Предположим, что выполнены условия* $(C1)-(C4)$. *Марковская цепь* $\mathcal{A}$ *эргодична тогда и только тогда, когда* $\lambda < 1$, *где* λ*-максимальное по модулю собственное значение оператора* A.

Доказательство. Пусть $\lambda < 1$. Для доказательства эргодичности цепи используем критерий Фостера [3]. Определим функцию Ляпунова следующим образом: для любого слова $\gamma = j_n \dots j_1 \in \Omega$, $\gamma \neq \emptyset$ положим

$$f(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} (g_{j_k} + c)$$

где $g_{j_k}-$ координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению λ и $c-$ константа, которая определяется ниже. Мы докажем, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha(t) = i\rho) < -\delta \tag{3}$$

для любых $i \in \mathbb{N}$, $\rho \in \Omega$.

Пусть $g = (g_j,\, j = 1, 2, ...)-$ собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ. Тогда

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} q(i,j)g_j + \sum_{j,k\in\mathbb{N}} q(i,jk)(g_j + g_k) = \lambda g_i,\ i \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Принимая во внимание (1) и (4), найдем приращение функции Ляпунова

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha = i\rho) = (\lambda-1)g_i + c\left(-q(i,\emptyset) + \sum_{j,k\in\mathbb{N}} q(i,jk)\right) \tag{5}$$

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. В силу условия $(C4)$ можно выбрать N так, чтобы при $i > N$ было выполнено

$$-q(i,\emptyset) + \sum_{j,k\in\mathbb{N}} q(i,jk) < -\varepsilon$$

Положим $c = -\frac{\lambda-1}{2}\min_{i\le N} g_i$ и $\delta = c\varepsilon$. Если $i \le N$, то, согласно формуле (5)

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha = i\rho) < \frac{(\lambda-1)g_i}{2} < -\delta$$

Если $i > N$, то $-q(i,\emptyset) + c\sum q(i,jk) < -\varepsilon$ и, следовательно,

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha = i\rho) < (\lambda-1)g_i - c\varepsilon < -\delta$$

Таким образом, неравенство (3) выполнено. Из критерия Фостера следует, что цепь эргодична.

Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно использовать критерий неэргодичности (см. [3]) с функцией Ляпунова

$$f(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} g_{j_k},\ \gamma = j_n \dots j_1$$

где g_{j_k} – координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению λ.

Литература

1. *Гайрат А. С., Малышев В. А., Меньшиков М. В., Пелих К. Д.* Классификация марковских цепей, описывающих эволюцию случайных струн // УМН — 1995. — Vol. 50, no. 2 (302).— P. 5–24.
2. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН — 1948. — Vol. 3, no. 1 (23). — P. 3–95.
3. *Fayolle G., Malyshev V. A., Menshikov M. V.* Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains. — Cambridge University Press, 2008.

UDC 519.217.2

An ergodicity criterion for Markov chains describing the dynamics of random words

O. V. Mashnikov*, A. A. Zamyatin*

* *Department of Probability Theory,*
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

We consider countable Markov chains with discrete time on the space of words. More exactly, states of the Markov chain are ordered sequences of symbols (from some alphabet) of arbitrary length. In our case the alphabet is a countable set. The dynamics of the chain is determined by a random grammar of a certain type. In each moment of time we can change one of the ends of the sequence that defines the state of the chain, with the help of specified rules of substitutions. Each substitution has a certain probability. Our goal is to prove an ergodicity criterion for such Markov chains.

Keywords: Markov chain, ergodicity, Lyapunov function, Foster criterion.