УДК 519.218.84/517.987.1

Размерность множества инвариантных конечно-аддитивных мер цепей Маркова в произвольном фазовом пространстве и эргодические следствия

А. И. Жданок[*†]

[*] *Кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Тувинский государственный университет, ул. Ленина, д. 36, г. Кызыл, Россия, 667000*

[†] *Лаборатория математического моделирования, Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов СО РАН, ул. Интернациональная, д. 117а, г. Кызыл, Россия, 667007*

Аннотация. В работе рассматриваются общие цепи Маркова в произвольном фазовом пространстве. Марковские операторы продолжаются с пространства счётно-аддитивных мер на пространство конечно-аддитивных мер. В работах автора ранее была доказана теорема о том, что, если все инвариантные конечно-аддитивные меры цепи Маркова счётно-аддитивны, то их подпространство конечномерно и цепь Маркова удовлетворяет условиям квазикомпактности Дуба-Деблина. Было доказано частичное обращение этой теоремы при размерности «единица». В настоящей работе приводится обращение данного утверждения при любой конечной размерности, но при некоторых дополнительных условиях. Приводятся примеры.

Ключевые слова: общие цепи Маркова, произвольное фазовое пространство, инвариантные конечно-аддитивные меры, условия квази-компактности.

1. Введение

Приведем используемые известные обозначения и сведения.

Пусть X – произвольное бесконечное множество и Σ — сигма-алгебра его подмножеств, содержащая все одноточечные подмножества из X. Обозначим $B(X,\Sigma)$ — банахово пространство ограниченных Σ-измеримых функций $f : X \to R$ с sup-нормой. Рассматриваются также банаховы пространства ограниченных мер $\mu : \Sigma \to R$, с нормой, равной полной вариации: $ba(X,\Sigma)$ - пространство конечно-аддитивных мер; $ca(X,\Sigma)$ - пространство счетно-аддитивных мер.

Конечно-аддитивная неотрицательная мера μ называется <u>чисто конечно-аддитивной</u>, если любая счетно-аддитивная мера λ, удовлетворяющая условию $0 \leq \lambda \leq \mu$, тождественно равна нулю.

Обозначим множества мер $S_{ba} = \{\mu \in ba(X,\Sigma) : \mu \geq 0, ||\mu|| = 1\}$, $S_{ca} = \{\mu \in ca(X,\Sigma) : \mu \geq 0, ||\mu|| = 1\}$. Все меры из этих множеств будем называть <u>вероятностными</u>.

Цепи Маркова (ЦМ) на пространстве (X, Σ) задаются своей переходной функцией (вероятностью) $p(x, E), x \in X, E \in \Sigma$, при условиях:

1) $0 \leq p(x, E) \leq 1, p(x, X) = 1$;

2) $p(\cdot, E) \in B(X, \Sigma), \forall E \in \Sigma$;

3) $p(x, \cdot) \in ca(X, \Sigma), \forall x \in X$.

Подчеркнем, что переходная функция у нас счетно-аддитивна по второму аргументу, т.е. мы рассматриваем классические ЦМ.

Переходная функция порождает два марковских линейных ограниченных положительных оператора:

$T : B(X, \Sigma) \to B(X, \Sigma), Tf(x) = \int_X f(y)p(x, dy), \forall f \in B(X, \Sigma)$,

$A : ca(X, \Sigma) \to ca(X, \Sigma), A\mu(E) = \int_X p(x, E)\mu(dx), \forall \mu \in ca(X, \Sigma)$.

Пусть начальная мера $\mu_0 \in S_{ca}$. Тогда итерационная последовательность счетно-аддитивных мер $\mu_n = A\mu_{n-1}, n \in N$, обычно и отождествляется с цепью Маркова.

Топологически сопряженным к пространству $B(X, \Sigma)$ является (изоморфно) пространство конечно-аддитивных мер: $B^*(X, \Sigma) = ba(X, \Sigma)$. При этом топологически сопряженным к оператору T служит оператор $T^* : ba(X, \Sigma) \to ba(X, \Sigma)$, который является продолжением оператора A на все пространство $ba(X, \Sigma)$ с сохранением его аналитического вида. Мы будем обозначать оператор T* как A.

В такой постановке естественно допустить к рассмотрению и марковские последовательности конечно-аддитивных мер: $\mu_0 \subset S_{ba}, \mu_n = A\mu_{n-1} \subset S_{ba}, n \in N$, сохраняя счетную аддитивность $p(x, \cdot)$.

Обозначим множества инвариантных вероятностных мер ЦМ: $\Delta_{ba} = \{\mu \in S_{ba} : \mu = A\mu\}$, $\Delta_{ca} = \{\mu \in S_{ca} : \mu = A\mu\}, \Delta_{ca} \subset \Delta_{ba}$. Известно, что для любой ЦМ $\Delta_{ba} \neq \emptyset$, но возможно, $\Delta_{ca} = \emptyset$.

2. Инвариантные меры и квазикомпактность

В исследованиях автора [1],[2] выяснилось, что размерность и состав множества инвариантных конечно-аддитивных мер марковского оператора A тесным образом связан с одним из центральных вопросов эргодической теории ЦМ, а именно, с известными условиями квазикомпактности марковских операторов в форме Дуба-Деблина (D). Если эти условия выполнены, т.е. если оператор A квазикомпактен, то ЦМ имеет конечное число инвариантных счетно-аддитивных мер и эргодические средние мер μ_n сходятся в некотором смысле к ним в метрической топологии.

В работе автора [2] была доказана следующая Теорема 12.2. *Для произвольной ЦМ условие Дуба-Деблина (D) (в его некоторой технической модификации) эквивалентно условию (*):*

$$\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma),$$

что означает, что все инвариантные конечно-аддитивные меры ЦМ являются счетно-аддитивными, или, другими словами, ЦМ не имеет инвариантных чисто конечно-аддитивных мер.

Из Теоремы 12.2 [2] и свойств квазикомпактной ЦМ сразу вытекает следующее утверждение: Теорема 8.2 [1]. *Для произвольной ЦМ, если выполнено условие (*), т.е.* $\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma)$, *то* $dim\Delta_{ba} = n < \infty$.

Там же было доказано обращение этой Теоремы для $n = 1$ (в технике слабых топологий): Теорема 8.3 [1]. *Для произвольной ЦМ, если* $dim\Delta_{ba} = 1$, *то* $\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma)$, *т.е. эта мера счетно-аддитивна.*

В настоящей работе мы приводим обращение Теоремы 8.2 [1] уже для произвольной размерности $n \in N$, но при дополнительных условиях (α):

Пусть $\mu \in \Delta_{ba}$, *и дано множество* $K_\mu \in \Sigma$ *такое, что* $\mu(K_\mu) = 1$. *Существует множество* $K \subset K_\mu$, $K \in \Sigma$ *такое, что* $\mu(K) = 1$ *и переходная функция* $p(x, E)$ *стохастически замкнута на* K, *т.е.* $p(x, K) = 1$ *для любого* $x \in K$.

Теорема 1. *Пусть* $dim\Delta_{ba} = n < \infty$, $\Delta_{ba} = co\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$. *Пусть все базисные меры* μ_i *из* Δ_{ba} *попарно сингулярны, и для каждой из них выполнено условие* (α).

Тогда $\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma)$, *т.е. все инвариантные конечно-аддитивные меры цепи Маркова являются счетно-аддитивными.*

Из-за ограниченного объема статьи доказательство опускаем.

Следствие. *Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда для ЦМ выполнены условия Дуба-Деблина (D), наше условие (*), у неё нет инвариантных чисто конечно-аддитивных мер, ЦМ является квазикомпактной, и обладает всеми соответствующими эргодическими свойствами.*

В книге Ревюза [3] (Глава 6, §3) доказываются близкие к нашим теоремам утверждения для харрисовских ЦМ на сепарабельном (X, Σ). Унас подобных ограничений нет, результаты носят более общий характер и содержат более сильные утверждения.

Проблемой существования и свойств инвариантных конечно-аддитивных мер для ЦМ в различных фазовых пространствах занимался еще ряд авторов, прежде всего - Šidak и Foguel (подробнее об этом см. [1],[2]).

3. Частные примеры

Конечно-аддитивные меры в теории цепей Маркова возникают не только при общих фазовых пространствах. Они могут дать кое-что новое даже для “почти” феллеровских ЦМ на компакте. Ниже мы рассматриваем три ЦМ1,2,3, заданные на отрезке $[0, 1]$ с обычной борелевской сигма-алгеброй.

Пример 1. Для любого $x \in (0,1)$ у ЦМ1 возможно два перехода - в точку x^2 с вероятностью x, и в точку 0 с вероятностью $1-x$. Точки 0 и 1 с вероятностями 1 переходят в себя, т.е.являются поглощающими. Такая ЦМ1 феллеровская, и имеет две инвариантные счетно-аддитивные меры Дирака δ_0 и δ_1 в точках 0 и 1. Она имеет также семейство мощности не менее континуума попарно сингулярных (и линейно независимых) инвариантных чисто конечно-аддитивных мер η, удовлетворяющих условию $\eta((\varepsilon,1)) = 1$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$ (доказательство опускаем).

Условия Теоремы 1 не выполнены и ЦМ1 не является квазикомпактной. Однако, при любом начальном $x_0 \in [0,1)$ порождаемая им марковская последовательность мер μ_n сильно метрически сходится к инвариантной мере δ_0, но не равномерно по x_0.

Пример 2. В предыдущем примере меняем местами вероятности переходов при $x \to x^2$ и $x \to 0$. Для такой ЦМ2 феллеровость нарушается лишь в точке $x = 1$. У нее остаются две инвариантные меры δ_0 и δ_1, исчезает семейство инвариантных чисто конечно-аддитивных мер "около единицы", но появляется новое бесконечное семейство таких инвариантных мер "около нуля" η с условием $\eta((0,\varepsilon)) = 1$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$ (доказательство опускаем).

Условия Теоремы 1 также не выполнены и ЦМ2 не является квазикомпактной. При этом, при любом $x_0 \in (0,1)$ последовательность μ_n лишь $\Im_C$ - слабо сходится к мере δ_0, и не сходится сильно.

Пример 3. Из двух ЦМ1 и 2 Примеров 1 и 2 скомбинируем новую ЦМ3 с правилами переходов на $[0,1/2]$ такими же, как у ЦМ1 из Примера 1, а на $(1/2,1]$ с такими же, как у ЦМ2 из Примера 2. Для новой ЦМ3 феллеровость нарушается также лишь в точке $x = 1$.

У новой ЦМ3 остаются две инвариантные счетно-аддитивные меры δ_0 и δ_1, и уже совсем отсутствуют инвариантные чисто конечно-аддитивные меры (доказательство опускаем).

Условия Теоремы 1 (в т.ч. условия (α)) выполнены, обе инвариантные меры счетно-аддитивны, и, следовательно, ЦМ3 квазикомпактна. Выполнены также аналитические условия Дуба-Деблина (D), например, с мерой $\varphi = 0,5 \cdot \delta_0 + 0,5 \cdot \delta_1$, $\varepsilon = 0,25$ и $k = 1$. При любом начальном $x_0 \in [0,1)$ марковская последовательность мер μ_n сильно метрически и экспоненциально быстро сходится к инвариантной мере δ_0 равномерно по $x_0 \in [0,1)$. При $x_0 = 1$ последовательность $\mu_n \equiv \delta_1$ также сильно "сходится" ко второй инвариантной мере δ_1. Отметим, что инвариантная мера δ_0 устойчива (притягивающая), а инвариантная мера δ_1 неустойчивая (отталкивающая).

В Примерах 1 и 2 такой сходимости μ_n к δ_0 препятствовали мощные буферы из инвариантных чисто конечно-аддитивных мер, прилипших в $\Im_C$-топологии к инвариантным счетно-аддитивным мерам δ_1 и δ_0 соответственно.

Доказательства некоторых из свойств ЦМ из Примеров 1,2,3 не так уж просты и опираются на ряд теорем из работ автора [1] и [2].

4. Заключение

В работе представлен новый результат по теории общих цепей Маркова, продолженных на пространство конечно-аддитивных мер. Полученный факт открывает новые возможности по дальнейшим исследованиям в данном направлении.

Литература

1. *Zhdanok A.I.* Finitely additive measures in the ergodic theory of Markov chains. I // Siberian Advances in Mathematics. — 2003. — Vol.13, no 1. — P. 87–125.
2. *Zhdanok A.I.* Finitely additive measures in the ergodic theory of Markov chains. II // Siberian Advances in Mathematics. — 2003. — Vol.13, no 2. — P. 108–125.
3. *Revuz D.* Markov Chains. — Amsterdam, Oxford. North Holland, Math. Libr., 1984.

UDC 519.218.84/517.987.1

Dimension of the set of invariant finite additive measures of Markov chains in an arbitrary phase space and ergodic consequences

A.I. Zhdanok[*†]

[*] *Department of Mathematical analysis and Methods of teaching mathematics,*
Tuvan State University,
Lenin str. 36, Kyzyl, 667000, Russia
[†] *Laboratory of Mathematical modeling,*
Tuva Institute of complex examination of natural resources SB RAS,
International str. 117a, Kyzyl, 667007, Russia

Abstract: The paper considers general Markov chains in an arbitrary phase space. Markov operators extend from the traditional space of countably additive measures to the space of finitely additive measures. The author has previously proved a theorem that if all invariant finite additive measures of a Markov chain are countably additive, then their subspace is finite-dimensional and the Markov chain satisfies the Doob-Doeblin quasi-compactness conditions. A partial inversion of this theorem was proved with the dimension "one". In this paper we prove the inversion of this assertion for any finite dimensionality, but under certain additional conditions. Examples are given.

Keywords: general Markov chains, an arbitrary phase space, invariant finitely additive measures, conditions for quasi-compactness.