УДК 519.248

Оценка вероятности переполнения буфера для неоднородного трафика

О. В. Лукашенко[*†], Е. В. Морозов[*†], Ю. С. Хохлов[‡]

[*] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

[†] *Петрозаводский государственный университет*

[‡] *Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова*

Аннотация. Для случая когда входящий поток требований на сервер есть сумма независимых дробного броуновского движения и альфа-устойчивого движения Леви получена асимптотическая нижняя оценка вероятности переполнения большого буфера.

Ключевые слова: дробное броуновское движение, альфа-устойчивый процесс Леви, вероятность переполнения.

1. Введение

Задача оценки качества обслуживания является одной из наиболее важных задач при анализе телекоммуникационных систем. На протяжении многих лет такие оценки производились на основе пуассоновской модели входящего потока или близких к ней марковских моделей. В начале девяностых годов на основе измерений трафика [1], было обнаружено, что трафик современных телекоммуникационных систем обладает совершенно новыми свойствами. В дальнейшем это было подтверждено и в многочисленных других эмпирических исследованиях. Было обнаружено, что такой трафик обладает тремя важными новыми свойствами: он является самоподобным в широком диапазоне шкал измерений, обладает свойством долговременной зависимости и величина нагрузки, поступающая от отдельных источников, имеет распределение с тяжелыми хвостами. Было показано, что если не учитывать этих особенностей, то это приводит к серьезным ошибкам при оценке качества обслуживания.

Были построены новые модели для описания такого трафика. Наиболее популярными среди них являются процесс дробного броуновского движения и устойчивый процесс Леви. Оказалось, что эти две модели тесно связаны с распределениями с тяжелыми хвостами и различными скоростями подключения источников. При быстром подключении мы получаем дробное броуновское движение, при медленном подключении возникает устойчивое движение Леви (см., например, [2]). Эмпирические исследования [3], [4] показали, что часто возникают и такие ситуации, когда трафик содержит обе описанные выше компоненты.

Пионерской работой, где рассматривалась система обслуживания с самоподобным входным потоком, является работа И. Норроса [5].

Входящий поток в данной работе строится на основе дробного броуновского движения. Выбор такого рода входного потока мотивирован функциональными предельными теоремами, согласно которым дробное броуновское движение возникает при суперпозиции большого числа независимых так называемых on/off-источников с тяжелыми хвостами [6].

В настоящей работе на основе методики, предложенной в работе Норроса, получена нижняя асимптотическая оценка вероятности переполнения большого буфера, когда на вход подается поток, состоящий из двух независимых компонент: дробного броуновского движения и устойчивого движения Леви с одинаковыми показателями Херста.

2. Основная часть

Предположим, что на вход системы с неограниченным буфером поступает входной процесс следующего вида:

$$A(t) = mt + B_{H_1}(t) + L_\alpha(t),$$

где $B_{H_1} = (B_{H_1}(t), t \in R^1)$ – процесс дробного броуновского движения (ДБД) с параметром Херста H_1, $L_\alpha = (L_\alpha(t), t \in R^1)$ – симметричное α-устойчивое движение Леви. Оба слагаемых являются самоподобными процессами с параметрами Херста H_1 и $H_2 = 1/\alpha$.

Всюду далее предполагается, что $H_1 = H_2 = H$, $H \in (1/2, 1)$, процессы B_{H_1} и L_α независимы. В этом случае процесс $B_H + L_\alpha$ также будет самоподобным с параметром Херста H. Теперь процесс A можно переписать в следующем виде:

$$A(t) = mt + t^H[B_H(1) + L_{1/H}(1)].$$

Пусть в системе имеется постоянная скорость обслуживания $C > 0$. Введем коэффициент $r := C - m$, имеющий смысл коэффициента загрузки. Обозначим через $Q(t)$ величину нагрузки (незавершенную работу) в момент времени t. Если $Q(0) = 0$, то для $Q(t)$ справедливо выражение

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \le s \le t} (A(t) - A(s) - C(t - s))$$

где символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению. Если $r > 0$, то величина стационарной нагрузки определяется следующим образом

$$Q \stackrel{d}{=} \sup_{t \ge 0} (A(t) - Ct)$$

Рассматривается задача оценки вероятности того, что величина стационарной нагрузки Q превысит некоторое пороговое значение b (вероятность переполнения):

$$\varepsilon(b) := \mathbb{P}[Q > b].$$

Используя подход из [5], искомая вероятность может быть ограничена снизу

$$\begin{aligned} \varepsilon(b) &= \mathbb{P}[Q > b] = \mathbb{P}\left(\sup_{\tau\geq 0}(A(\tau) - C\tau) > b\right) \geq \\ &= \mathbb{P}\left[B_H(1) + L_\alpha(1) > \inf_{\tau\geq 0} \frac{b + r\tau}{\tau^H})\right] \end{aligned}$$

Функция $f(\tau) = \dfrac{b + r\tau}{\tau^H}$ достигает минимума в точке

$$\tau_0 = \frac{bH}{(1-H)r},$$

а соответствующее минимальное значение равно

$$f(\tau_0) = \frac{r^H(1-H)^{-(1-H)}}{H^H} \cdot b^{1-H}.$$

С учетом данных соотношений нижняя граница вероятности переполнения может быть записана в виде

$$\varepsilon(b) \geq \mathbb{P}\left[B_H(1) + L_\alpha(1) > r^H(1-H)^{-(1-H)}H^{-H}b^{1-H}\right] =: g(b).$$

Справедлива следующая

Теорема 1 *Для нижней границы вероятности переполнения справедлива следующая асимптотика:*

$$g(b) \sim C_1(r,\alpha) \cdot b^{-(\alpha-1)},\ b \to \infty,$$

где

$$C_1(r,\alpha) = \mathbb{E}(|U|^\alpha)\frac{\sin(\pi\alpha/4)\cdot\Gamma(\alpha/2)\cdot(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\pi\cdot\alpha^\alpha\cdot r},\ U \stackrel{d}{=} N(0,1).$$

3. Заключение

В работе рассмотрена модель системы обслуживания с постоянной скоростью и входным потоком, представляющим собой сумму дробного броуновского движения и α-устойчивого процесса Леви. Для нижней границы вероятности переполнения была найдена точная асимптотика при растущем буфере.

Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15–07–02341, № 15–07–02354,№ 15–07–02360.

Литература

1. *Leland W., Taqqu M., Willinger W., Wilson D.* On the selfsimilar nature of Ethernet traffic (extended version) // IEEE/ACM Trans. Networking. — 1994. — Vol. 2, no. 1. — P. 1–15.
2. *Mikosch T., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A.* Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Ann. Appl. Probab. — 2002. — Vol. 12, no. 1. — P. 23–68.
3. *Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R.* Connection-level analysis and modeling of network traffic. — Tech. Rep., ECE Dept., Rice Univ., 2001.
4. *Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R.* Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic // Proceedings of the 1st ACM SIGCOMM Workshop on Internet Measurement. — 2001. — P. 99–103.
5. *Norros I.* A storage model with self-similar input // Queuing Syst. — 1994. — Vol. 16. — P. 387–396.
6. *Taqqu M. S., Willinger W., Serman R.* Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling // Computer Communications Review. — 1997. — Vol. 27, no. 2. — P. 5–23.

UDC 519.248

On the asymptotic bound for the overflow probability of fluid queue with heterogenous input

O. V. Lukashenko[*†], **E. V. Morozov**[*†], **Y. S. Khokhlov**[‡]

[*] *Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre RAS*
[†] *Petrozavodsk State University*
[‡] *Lomonosov Moscow State University*

For the fluid queue fed by superposition of fractional Brownian motion and alpha-stable Levy process the asymptotic of lower bound for the overflow probability was obtained.

Keywords: fractional Brownian motion, alpha-stable Levy process, overflow probability.