УДК 519.21

Оценка вероятности отказа системы с минимальным накоплением обслуживания элементов

А. В. Макаричев*

* *Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, ул. Ярослава Мудрого, 25, Харьков, Украина, 61002*

Аннотация. Получены оценки надежности восстанавливаемых систем с минимальным накоплением обслуживания элементов.

Ключевые слова: вероятность отказа восстанавливаемой системы на периоде регенерации, минимальное накопление обслуживания элементов.

1. Введение

В настоящей работе продолжаются исследования А.Д. Соловьева и его учеников в области получения оценок для вероятности отказа восстанавливаемых резервированных систем на периоде регенерации. Одна из таких верхних оценок несколько другим методом может быть слегка улучшена, что позволяет при обычном дублировании свести ее к нижней оценке и тем самым к точному значению исследуемой вероятности. Этому и посвящается следующее исследование.

2. Основная часть

В ремонтный орган (РО), представляющий собой однолинейную систему массового обслуживания, поступает пуассоновский поток с параметром λ требований на восстановление элементов. Требования обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания требований независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $H(x)$. Обозначим

$$h(s) = \int_{x>0} \exp(-sx)dH(x)$$

преобразование Лапласа для времени η обслуживания требования. Во время обслуживания требования с интенсивностью ν возникает простейший поток накопления обслуживания. В зависимости от числа k точек этого простейшего потока за время обслуживания требования возникает дополнительный набор из независимых одинаково распределенных с ф.р. $F(x)$ случайных времен $X_1, X_2, \ldots, X_k$, из которых выбирается условный минимум $X_{min}^{(k)} = min\{X_1, \dots, X_k\}$ с функцией распределения

$$F^{(k)}(x) = 1 - P\left\{X_{min}^{(k)} > x\right\} = 1 - \prod_{j=1}^{k} P\{X_j > x\} = 1 - \prod_{j=1}^{k} \bar{F}^j(x)$$

и он добавляется ко времени обслуживания требования, здесь $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Пусть

$$\bar{R}(x) = \int\limits_{t>0} \sum_{k\geq 0} \frac{(\nu t)^k}{k!} \exp(-\nu t) \left[\bar{F}(x)\right]^k dH(t) = h\left\{-\nu[F(x)]\right\}$$

- функция, дополняющая до единицы функцию распределения

$$R(x) = 1 - \bar{R}(x)$$

безусловного минимума X_{min} возможно дополнительно возникшего времени ко времени обслуживания требования. А

$$G(x) = P\left\{\eta + X_{min} \leq x\right\} = \int\limits_0^x R(x-t) dH(t)$$

- функция распределения суммарного времени обслуживания требования.

После восстановления элемент возвращается туда, откуда он потупил. Случайный процесс обслуживания в момент времени t задаётся числом элементов на обслуживании в РО. Он является регенерирующим. Моментами регенерации являются моменты перехода случайного процесса в состояние $\{0\}$ (в РО нет требований). В момент перехода этого случайного процесса из состояния $\{n\}$ в состояние $\{n+1\}$ наступает отказ, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через q вероятность отказа на периоде регенерации этого случайного процесса обслуживания.

Пусть $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$ и

$$b_{n-1} = \int\limits_0^\infty \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x) \bar{G}(x) dx.$$

Лемма 1.*Пусть для чисел $a_{ij} \geq 0$, $b_i > 0$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ известно, что*

$$x_i \leq b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда для всех справедливо неравенство*

$$x_i \leq \frac{b_i}{1-\alpha},\ \textit{где}\ \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} b_j}{b_i}.$$

Доказательство. Из условия леммы $0 < x_j \leq b_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ верно $x_j = \frac{b_j}{1-\alpha_j}$, где $\alpha_j = 1 - \frac{b_j}{x_j}$.

Пусть $\alpha_k = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \alpha_j$. Тогда из условия и последнего равенства верна цепочка соотношений

$$b_k \left(1 + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\right) = \frac{b_k}{1-\alpha_k} = x_k \leq b_k + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j =$$

$$= b_k \left(1 + \frac{1}{b_k} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j\right) = b_k \left(1 + \frac{1}{b_k} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{b_j}{1-\alpha_j}\right) \leq$$

$$\leq b_k \left(1 + \frac{1}{b_k(1-\alpha_k)} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_j\right).$$

Сравнивая левую и правую части этих соотношений, мы видим, что

$$b_k \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha_k}\right) \leq b_k \left(1 + \frac{1}{b_k(1-\alpha_k)} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_j\right),$$

и отсюда верны неравенства

$$\alpha_j \leq \alpha_k \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{kj} b_j}{b_k} \leq \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} b_j}{b_i}.$$

Следовательно, для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ верно $x_j = \frac{b_j}{1-\alpha_j} \leq \frac{b_j}{1-\alpha}$.

Лемма 2. *Для любых неотрицательных целых чисел* i, j *верно* $b_i b_j \leq C_{i+j}^{i} b_0 b_{i+j}$. Доказательство. Обозначим

$$f(x) = \frac{\lambda \exp(-\lambda x) \bar{G}(x)}{\int\limits_0^\infty \lambda \exp(-\lambda x) \bar{G}(x) dx}$$

и

$$M_i = \int\limits_0^\infty x^i f(x)dx.$$

Заметим, что $M_i = \frac{i!b_i}{\lambda^i b_0}$. Отсюда и неравенства для моментов [1] $M_i M_j \le M_{i+j}$ следует цепочка соотношений

$$b_i b_j = \frac{b_0^2}{i!j!}\frac{i!b_i}{\lambda^i b_0}\frac{j!b_j}{\lambda^j b_0}\lambda^{i+j} = \lambda^{i+j}\frac{b_0^2}{i!j!}M_i M_j \le \lambda^{i+j}\frac{b_0^2}{i!j!}M_{i+j} =$$

$$= \lambda^{i+j}\frac{b_0^2}{i!j!}\frac{(i+j)!b_{i+j}}{\lambda^{i+j}b_0} = C_{i+j}^i b_0 b_{i+j},$$

то есть $b_i b_{i+j} \le C_{i+j}^i b_0 b_{i+j}$.

Обозначим через $q_r(n+1)$ условную вероятность отказа на периоде регенерации при условии, что в его начале в РО находятся ровно r полных требований на восстановление элементов, $r = 1, 2, \ldots, n-1$ (напомним, отказ наступает в случае в момент перехода системы из состояния $\{n\}$ в состояние $\{n+1\}$, то есть когда неисправными окажутся $n+1$ элементов).

Теорема. *Для всех натуральных чисел n верно неравенство*

$$q = q_1(n+1) \le \frac{n-1}{1 - b_0(2^{n-1} - 1)}.$$

Доказательство. Обозначим через j - число отказавших элементов за время восстановления первого отказавшего элемента на периоде занятости РО по формуле полной вероятности запишем

$$q_1(n+1) = b_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j q_j(n+1).$$

По формуле полной вероятности записываем выражение для вероятности отказа $q_r(n+1)$, когда вначале периода занятости в РО ровно r (не менее двух) полных требований,

$$q_r(n+1) = b_{n-r} + \sum_{j=0}^{n-r} a_j q_{r-1+j}(n+1), 2 \le r \le n.$$

Заметим, что $a_0 = 1 - b_0$ и $a_j = b_{j-1} - b_j$, $j \ge 1$. Эти равенства и преобразование Абеля позволяют записать и оценить сверху вторые слагаемые в правых частях последних двух серий выражений соответственно в виде

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j q_j(n+1) = \sum_{j=1}^{n-1} [b_{j-1} - b_j] q_j(n+1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} b_j [q_j(n+1) - q_{j-1}(n+1)] - b_{n-1} q_{n-1}(n+1) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n-1} b_{j-1} [q_j(n+1) - q_{j-1}(n+1)]$$

(здесь по определению считаем $q_0(n+1) = 0$),

$$\sum_{j=0}^{n-r} a_j q_{r-1+j}(n+1) = \sum_{j=1}^{n-r} [b_{j-1} - b_j] q_{r-1+j}(n+1) + [1 - b_0] q_{r-1}(n+1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-r} b_{j-1} [q_{r-1+j}(n+1) - q_{r-2+j}(n+1)] - b_{n-r} q_{n-1}(n+1+q_{r-1}(n+1)) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n-r} b_{j-1} [q_{r-1+j}(n+1) - q_{r-2+j}(n+1)] + q_{r-1}(n+1)$$

для $2 \le r \le n$.

Обозначим через $\gamma_{n-j+1}(n+1) = q_j(n+1) - q_{j-1}(n+1)$, $2 \le j \le n-1$. По определению $\gamma_n(n+1) = q_1(n+1)$. Подставляя вместо вторых слагаемых в правых частях вышеозначенных выражений полученные верхние оценки для них, перенося последние слагаемые (для r не менее двух) справа налево, преобразуем наши выражения для вероятностей отказов в виде равенств в неравенства для них и их разностей соответственно

$$\gamma_n(n+1) \le b_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j-1} \gamma_{n-(j-1)}(n+1)$$

для $r = 1$ и

$$\gamma_{n+1-r}(n+1) \le b_{n-r} + \sum_{j=1}^{n-r} b_{j-1} \gamma_{n+1-r-(j-1)}(n+1)$$

для $2 \leq r \leq n$. Для этой системы неравенств в условиях леммы 1 матрица $A = \{a_{ij}\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 \\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & b_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вышеупомянутой системы неравенств используем лемму 1, взяв $x_i = \gamma_{n+1-i}(n+1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Из этой системы неравенств согласно лемме 1

$$\gamma_n(n+1) = q_1(n+1) \leq \frac{b_{n-1}}{1-\alpha}, \text{ где } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{b_{j-1}b_{n-j}}{b_{n-1}}.$$

Согласно лемме 2 для всех целых $1 \leq j \leq n$ верно неравенство $b_{j-1}b_{n-j} \leq C_{n-1}^{j-1} b_0 b_{n-1}$ и

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{b_{j-1}b_{n-j}}{b_{n-1}} \leq b_0 \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n-i} C_{n-1}^{j-1} = b_0 \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^{j-1} = b_0(2^{n-1}-1).$$

Получив верхнюю оценку для величины α, $\alpha \leq b_0(2^{n-1}-1)$, мы тем самым оценили и вероятность отказа системы на периоде регенерации случайного процесса в модели резервирования с восстановлением

$$q = q_1(n+1) \leq \frac{b_{n-1}}{1 - b_0(2^{n-1}-1)}.$$

Следствие. *Для вероятности отказа q верна двусторонняя оценка*

$$b_{n-1} \leq q = q_1(n+1) \leq \frac{b_{n-1}}{1 - b_0(2^{n-1}-1)}, n = 1, 2, \dots.$$

3. Заключение

Для простого дублирования, когда $n = 1$, эта оценка даёт точное значение для вероятности $q_1(2) = b_0$ (сравните с полученной другим методом похожей верхней оценкой великого нашего учителя А.Д. Соловьёва (с. 98–100 в [2]), в которой отсутствует вычитаемая единица в скобках в знаменателе). Стоит также отметить, что при числе резервных элементов $n = 2$ величина в скобках в знаменателе у новой оценки вдвое меньше, чем соответствующий множитель у верхней оценки этой вероятности в замечательном труде [2].

Литература

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.
2. Вопросы математической теории надежности / Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко, А. Д. Соловьев, И. А. Ушаков / Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Радио и связь, 1983.

UDC 519.21

Assessment of the Probability of System Failure with Minimum Service Accumulation Elements

A. V. Makarichev*

* *Kharkiv National Automobile and Highway University,*
Yaroslav Mudry str. 25, Kharkiv, 61002, Ukraine

Assessment of the probability of system failure with minimum service accumulation elements are obtained.

Keywords: the probability of system failure, minimum service accumulation elements.